

Université de Montréal

Géométrie spectrale des problèmes mixtes
Dirichlet-Neumann

par

Eveline Legendre

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août 2006

© Eveline Legendre, 2006



QA

3

US4

2006

V.012

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Géométrie spectrale des problèmes mixtes

Dirichlet-Neumann

présenté par

Eveline Legendre

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Dmitry Jakobson

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Cette recherche concerne la géométrie spectrale des variétés à bord pour le problème mixte Dirichlet-Neumann. Ce type de problème aussi appelé problème de Zaremba consiste à séparer le bord en deux parties et à considérer les fonctions propres du Laplacien qui s'annulent sur l'une d'elle (condition de Dirichlet) et dont la dérivée directionnelle extérieure s'annule sur l'autre (condition de Neumann). Il est naturel de considérer ces conditions puisqu'elles correspondent à de nombreux modèles physiques dans lesquels le Laplacien est impliqué. La vibration d'une membrane fixée sur une partie de son bord correspond au problème de Zaremba.

L'approche adoptée dans cette étude est principalement géométrique et algébrique. L'accent est mis, d'une part, sur les extrema des petites valeurs propres dans le cas du disque de dimension 2 en rapport avec le choix de la décomposition du bord déterminant le problème mixte Dirichlet-Neumann, et d'autre part, sur le point de vue algébrique pour les problèmes mixtes sur une variété à bord.

Le chapitre 1 fournit le vocabulaire et les notions de base nécessaires à la compréhension des chapitres ultérieurs. Certains résultats classiques sur lesquels reposent les démonstrations des chapitres 2 et 3 sont énoncés. De brèves explications sont données afin de faciliter la lecture.

Dans le chapitre 2, sont présentés des résultats originaux concernant les extrema des valeurs propres du Laplacien sur des domaines euclidiens munis de conditions mixtes, déterminées par une partie du bord ayant un volume fixé. En effet, on démontre que le suprémum de la n ème valeur propre est la n ème valeur propre

du problème de Dirichlet sur ce domaine et est atteint par une suite maximisante de partitions du bord. Ceci consiste en une généralisation du cas particulier de la première valeur propre qui fut démontré en 1999 par Denzler dans l'article [D1]. Ensuite, on réduit le problème de minimisation de la deuxième valeur propre sur le disque à une certaine famille explicite de partitions du bord paramétrée par un intervalle compact. Ces résultats étant des extensions de certains théorèmes de Denzler, on présente ceux-ci à des fins de complétude. Finalement, on montre que si l'on impose une borne au nombre de composantes connexes de la partie Dirichlet, le maximum est atteint lorsque ces composantes sont uniformément distribuées. Ce chapitre contient aussi des tests numériques appuyant les résultats ci-dessus, exhibant les variations des deux premières valeurs propres associées à des familles de partitions particulières.

Le chapitre 3 est une exposition détaillée de l'approche algébrique des problèmes d'isospectralité pour les variétés à bord. Ce point de vue découle du Théorème de Sunada et plus particulièrement de l'extension que Bérard en a fait. On en déduit une extension concernant le problème de Dirichlet. On donne les détails algébriques expliquant un exemple de variétés isospectrales et non-isométriques qui a été publié depuis un autre point de vue par Buser et al dans l'article [BCDS]. À partir de ceci, on construit un exemple original de domaines planaires isospectraux et non isométriques pour des conditions mixtes. De plus, on exhibe une certaine structure algébrique commune aux exemples connus de variétés admettant une décomposition du bord dont l'échange des conditions Dirichlet et Neumann laisse le spectre inchangé. Ces exemples ont été portés récemment à notre attention par Jakobson et al dans l'article [JLNP].

Mots clés: Laplacien, géométrie spectrale, problème mixte Dirichlet-Neumann, problème de Zaremba, isospectralité, valeur propre extrémale, Théorème de Sunada, transplantation.

SUMMARY

In this master thesis, we will discuss spectral geometry of mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem on riemannian manifolds. This problem, also called Zaremba's eigenvalue problem, consists in splitting its boundary into a disjoint union of two parts, not necessarily connected, and in examining the eigenfunctions of the Laplace operator, which have to vanish along one part (Dirichlet condition), and whose normal derivative has to vanish along the other part (Neumann condition). These conditions are natural in the sense that they correspond to many physical models where the Laplacian is involved. The Zaremba problem is, for example, a model of a membrane fixed only on one part of its boundary.

Our point of view is mostly geometric and algebraic. The emphasis will equally be on the extrema of small eigenvalues for the disk with respect to a decomposition of the boundary specifying the mixed Dirichlet-Neumann conditions, as on some applications of Sunada's Theorem, and more generally, the algebraic point of view, to mixed problems on manifolds with boundary.

Background concepts and necessary vocabulary are presented in Chapter 1. The proofs presented in Chapter 2 and 3 rest on classical results which are enounced along with some short explanations in Chapter 1.

In Chapter 2, we present some original results on the extrema of eigenvalues on a Lipschitz euclidean domain with mixed conditions determined by a subset of the boundary of fixed volume. Indeed, we show that the maximum of the n -th eigenvalue is the n -th Dirichlet eigenvalue. This maximum is obtained

as the limit of a maximizing sequence of boundary partitions. This consists in a generalization of the particular case of the first eigenvalue, which had been done by Denzler in 1999, in his paper [D1]. Then, the problem of minimizing the second eigenvalue on the disk is reduced to an explicit compact family of decompositions of the boundary with at most four connected parts. These results are extensions of two theorems due to Denzler. For the sake of completeness we also present them. We conclude Chapter 2 with a proof that fixing an upper bound on the number of connected components of the part of the boundary where Dirichlet condition is imposed, the maximum of the first eigenvalue is reached by a uniformly distributed partition. The results of this Chapter are backed by numerical simulations which exhibit the variations of the first two eigenvalues induced by some specific families of partitions.

Chapter 3 is a detailed presentation of the algebraic approach to isospectral problems for manifolds with boundary. This is done from the point of view of Bérard generalization of Sunada's Theorem. We give an extension for Dirichlet problem. Algebraic details pertaining to an example of isospectral non-isometric manifolds are given. This example was published by Buser and al. in the paper [BCDS], but from a different point of view. From this example, we construct a new example of isospectral non-isometric manifolds with mixed boundary conditions. Moreover, we exhibit some algebraic structures that are common to the known examples of manifolds for which there exist decompositions such that exchanging the Dirichlet and Neumann conditions leads to the same spectrum. These types of examples were brought to our attention recently by Jakobson and al. in the paper [JLNP].

Keywords: Laplacian, Spectral geometry, Mixed boundary value-problem, mixed Dirichlet-Neumann problem, Zaremba problem, isospectrality, extremal eigenvalue, Sunada's Theorem, transplantation.

Table des matières

Sommaire.....	iv
Summary.....	vi
Table des figures.....	xi
Remerciements.....	xiii
Introduction.....	2
Chapitre 1. Outils de base en géométrie spectrale.....	5
1.1. Introduction.....	5
1.2. Quelques notations et définitions.....	5
1.2.1. Connexion de Levi-Civita.....	7
1.2.2. Calcul en coordonnées locales.....	7
1.2.3. Le Laplacien.....	8
1.2.4. Géodésiques, distance et coordonnées normales.....	8
1.2.5. Action du groupe d'isométries sur une variété riemannienne....	10
1.3. Intégration, Théorème de Green.....	13
1.4. Le spectre du Laplacien.....	14
1.4.1. Les fonctions propres.....	16
1.4.1.1. Existence et régularité des solutions.....	18
1.4.2. Action du groupe d'isométries sur les fonctions.....	20
1.5. Caractérisation variationnelle des valeurs propres du Laplacien....	21
1.5.1. Fonctions admissibles et Théorème de Rayleigh.....	21

1.5.2. Principe de Monotonie	23
1.5.3. Théorème de Courant	23
Chapitre 2. Étude du problème mixte sur le disque plat	26
2.1. Supremum	29
2.2. Minimum de $\lambda_1(\Gamma)$ et $\lambda_2(\Gamma)$	31
2.2.1. Symétrisations sphérique et cylindrique	31
2.2.2. Minimum pour $\lambda_1(\Gamma)$ sur le disque	32
2.2.3. Minimum de $\lambda_2(\Gamma)$ sur le disque plat	35
2.3. Maximisation de $\lambda_1(\mathbb{D})$, sur certaines classes de fonctions	41
2.3.1. Le cas à deux composantes	41
2.3.2. Le cas général	45
2.3.3. Application aux polygones réguliers	48
2.4. Résultats numériques	48
2.5. Conclusion et analyse des résultats	49
2.5.1. Quelques conjectures pour λ_2	49
2.5.2. Isospectralité et conditions mixtes	52
Chapitre 3. Le Théorème de Sunada et conditions mixtes	54
3.1. Spectre et quotient riemannien	54
3.1.1. Passage au quotient	54
3.1.2. Spectre et variété quotient	57
3.2. Le Théorème de Sunada	58
3.2.1. Transplantation de fonctions	60
3.3. Conditions au bord pour les surfaces quotientées	62
3.3.1. Pavages et réflexion	63
3.3.2. Le Théorème de Sunada pour le problème Dirichlet	67

3.4. Un exemple pour le Théorème de Sunada	70
3.4.1. Un triplet de Sunada (G, H, K)	70
3.4.2. La construction	70
3.4.3. Exemple avec conditions mixtes au bord	76
3.5. Isospectralité et condition mixte	77
3.5.1. Un exemple Dirichlet-Neumann isospectral	78
3.6. Conclusion	81
Index	85
Bibliographie	87

Table des figures

2.1	Exemples de 2 et 3-partitions complètement symétriques	29
2.2	Famille de partitions du bord, $\{\Gamma_\beta\}$, paramétrisée par $\beta \in [0, \frac{2\pi-A}{2}]$ et contenant le minimum de la deuxième valeur propre.	37
2.3	Exemple du produit d'une symétrisation	38
2.4	La 2-partition complètement symétrique et une 2-partition quelconque	42
2.5	Construction de f^*	44
2.6	Variation des deux premières valeurs propres en fonction de β	49
2.7	Variation des deux premières valeurs propres en fonction de α	49
2.8	Variation de la première valeur propre en fonction de deux paramètres α et β	50
2.9	Courbes représentant les trois premières valeurs propres de la famille de partition donnée par β (voir Figure 2.6)	51
2.10	Ligne de niveau des deuxièmes fonctions propres associées à des partitions autour d'une valeur propre spécial	52
3.1	Un pavage du disque hyperbolique	65
3.2	Représentation de M/K (à gauche) et M/H (à droite)	74
3.3	Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec condition Neumann ([BCDS])	75
3.4	Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec condition Dirichlet ([BCDS])	76

3.5	Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec conditions mixtes	76
3.6	Exemple d'un domaine planaire Dirichlet-Neumann isospectral	78
3.7	Le revêtement ramifié \mathcal{D} du disque unité.	79
3.8	Exemple	82

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Iosif Polterovich, pour m'avoir donné la chance et les moyens de faire cette recherche. Plus précisément, je le remercie de m'avoir laissé entrevoir son point de vue original et intelligent de la recherche et des mathématiques, ainsi que pour ses conseils et sa disponibilité.

Je remercie énormément Rémi Leclercq pour les "valuable discussions" et ses relectures attentives, sans compter le support technique, moral et son positivisme obsessionnel. Merci aussi à Alexandre Girouard pour avoir relu attentivement le Chapitre 1 et m'avoir aidé avec les questions les plus subtiles d'analyse mais surtout pour sa curiosité tentaculaire (son intérêt toujours vif envers tout et presque n'importe quoi). Je remercie Baptiste Chantraine pour quelques questions précises de géométrie et encore plus pour sa contagieuse confiance en soi. Je remercie ces trois là, ainsi que Gabriel Chênevert et Clément Hyvrier parce qu'une question de mathématiques est toujours la bienvenue avec eux et que j'ai certainement appris et compris plus de choses et plus rapidement en étant entourée de si bons apprentis "matheux".

Évidemment, je remercie ma famille Anne-Marie, Robert, Sophie-Anne, Élise et Danielle qui m'ont toujours encouragée (et endurée). Je remercie chaudement mes amies Karine, Marie-Lou et Natalys pour le support moral et tous les petits bobos qu'elles m'ont aidée à surmonter.

Je voudrais remercier Issa Lizon sans qui je n'aurais pas aimé les mathématiques

et Matthieu Robert pour m'avoir appris le sens des mots travail, détermination et pour m'avoir donné le goût de réussir.

Je remercie aussi Claude Gravel pour m'avoir aidé à élaborer un programme Matlab efficace pour les tests numériques.

INTRODUCTION

La géométrie spectrale étudie les relations entre le spectre du Laplacien défini sur une variété riemannienne donnée et les propriétés géométriques de cette dernière. Il y a différentes motivations à cette étude. D'une part, le Laplacien apparaît dans diverses équations de la Physique comme celles que satisfont les fonctions décrivant la vibration d'un corps ou le comportement de la distribution de température dans une pièce. À travers ces interprétations, les éléments de son spectre, ses valeurs propres, dans le cas de variétés compactes, peuvent prendre différents sens physiques. De ce point de vue, il peut être utile et certainement intéressant de savoir en quoi la géométrie d'un objet influence les phénomènes physiques qui s'y déroulent. En 1964, Milnor exhiba le premier exemple de variétés riemanniennes distinctes ayant exactement le même spectre (isospectrales). Il était donc dès lors clair que le spectre du Laplacien ne permettrait pas de retrouver toute l'information contenue dans la structure riemannienne d'une variété. Cependant, certains résultats fondateurs de la géométrie spectrale, telle la formule de Weyl, reliant le volume et la dimension d'une variété compacte à son spectre, montrent que cette suite (discrète) de réels positifs permet de recouvrer une partie de cette information. L'intérêt mathématique de comprendre dans quels sens et à quels degrés, le spectre de l'opérateur de Laplace détermine les propriétés topologiques, géométriques et/ou riemanniennes d'une variété, est bien nourri. Les recherches entourant les variétés isospectrales et non isométriques ont déjà permis d'en rejeter certaines.

Les variétés à bord, dont la fermeture est compacte, notamment les domaines euclidiens, apparaissent fréquemment dans les modèles physiques et les problèmes

mathématiques. Il est donc naturel d'étendre les résultats et les questions de géométrie spectrale à ces objets. Or, lorsque la variété possède un bord il est de mise d'y imposer des conditions auxquelles les fonctions propres, associées aux valeurs propres du spectre, devront se contraindre. Ces conditions prescrites correspondent à des situations naturelles à considérer, tel l'exemple classique de la membrane fixée le long de sa frontière coïncidant avec la condition dite de Dirichlet qui impose aux fonctions propres du Laplacien de s'annuler au bord du domaine. Parallèlement, le problème où la membrane est "flottante" est décrit par le problème de Neumann ou "à frontière libre", qui impose aux fonctions propres d'avoir une dérivée directionnelle extérieure nulle. Le problème qui consiste à imposer en alternance la condition de Dirichlet et de Neumann sur une partition donnée du bord est nommé problème de Zaremba ou problème avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann. Ce dernier cas est le contexte général de cette recherche.

Jochen Denzler a donné une interprétation intéressante du problème mixte. Supposons que le domaine euclidien représente une pièce dont les murs sont parfaitement isolés (partie Neumann) et les fenêtres (partie Dirichlet) sont maintenues à une température fixée et autorisent les échanges de chaleur. En supposant, qu'il n'y ait pas de convection, on peut montrer que, génériquement, ce sont les premières valeurs propres associées à ce problème qui sont prédominantes relativement au taux de perte de chaleur à travers les fenêtres. L'étude des variations des petites valeurs propres en fonction de la géométrie du domaine et de la partition du bord s'en trouve d'autant plus justifiée. Or, si parfois il est possible de connaître explicitement les valeurs propres à partir du calcul des fonctions propres pour les problèmes avec conditions pures, il est exceptionnel que ceci soit possible pour un problème mixte. En fait, les méthodes classiques de résolution d'équations avec conditions au bord sont essentiellement inefficaces pour le problème de Zaremba.

Une voie de recherche qui semble nécessaire à l'avancement de notre compréhension des problèmes mixtes en général est l'étude de la variation des valeurs propres sur un domaine fixé, en fonction de la partition du bord déterminant le problème. Suivant cette idée, le disque avec son bord homogène, est un choix naturel étant donné que les seules variables restantes sont connexité, nombre et positions relatives des composantes connexes de chacune des parties formant le domaine des conditions de Dirichlet et de Neumann.

L'isospectralité dans le cas mixte est un sujet d'intérêt nouveau. Jakobson, Levitin, Nadirashvili, Parnovski et Polterovich ont commencé à explorer cette question dans les articles [JLNP] et [LPP]. Ils ont donné des exemples de domaines distincts isospectraux, pour des conditions mixtes au bord ainsi que des exemples non triviaux de variétés isométriques et isospectrales avec des conditions mixtes au bord. Ils ont ouvert des voies de recherche prometteuses et posé des conjectures encore ouvertes qui seront, pour partie, discutées dans ce mémoire.

Avec l'étude de l'isospectralité pour les problèmes de Zaremba, de nombreuses voies distinctes, et complémentaires, apparaissent d'elles-mêmes. L'une d'entre elles est l'étude de la dépendance des petites valeurs propres du Laplacien vis-à-vis des partitions déterminant le problème mixte. Les inégalités strictes entre les valeurs propres de problèmes distincts suffisent en effet à démontrer la non isospectralité. Une autre est une approche algébrique qui a fait ses preuves avec le Théorème de Sunada pour produire des exemples de variétés fermées non isométriques et isospectrales pour les problèmes avec condition pure. Ce sont ces idées qui sont développées dans ce travail.

Chapitre 1

OUTILS DE BASE EN GÉOMÉTRIE SPECTRALE

1.1. INTRODUCTION

La géométrie spectrale est un sujet à la croisée des grandes branches des mathématiques que sont l'Analyse fonctionnelle et la Géométrie Riemannienne. D'autres théories, comme celle des représentations de groupes finis sont aussi très utiles à cette étude. Dans le présent chapitre, le vocabulaire de base et les notations sont fixées. Certains des résultats classiques de ces domaines sont énoncés. Ceci permet de justifier les théorèmes classiques de géométrie spectrale utilisés dans les chapitres suivants. Ce premier chapitre est fortement inspiré du premier chapitre du livre *Eigenvalue in Riemannian geometry*, d'Isaac Chavel parce qu'il traite efficacement de la majorité de ces notions.

1.2. QUELQUES NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Conventions topologiques et terminologiques Dans ce qui suit, il sera question de variété lisse avec ou sans bord. Soit M une variété lisse à bord de dimension n , c'est-à-dire qu'au lieu d'être modelée sur des ouverts de \mathbb{R}^n elle est homéomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n \cap \{x_1 \geq 0\}$ avec des changements de cartes lisses. On peut donc définir les points du bord ∂M comme ceux que les cartes envoient sur l'hypersurface déterminée par $\{x_1 = 0\}$, la régularité des changements de cartes permet cette caractérisation. Cependant, afin de ne pas s'embarrasser

à distinguer les cas de variétés à bord et sans bord il est préférable de se donner comme convention que M symbolise les points intérieurs de la variété à bord ($\partial M \cap M = \emptyset$). Ainsi, elle est bien une variété au sens usuel. On note $\overline{M} = M \cup \partial M$ la fermeture de M . Les variétés qui seront principalement étudiées ici sont celles dont la fermeture est compacte. Par exemple, les domaines planaires, des ouverts bornés de \mathbb{R}^2 dont la fermeture est (nécessairement) compacte. Afin d'alléger le texte, une variété dont la fermeture est compacte sera parfois dite compacte. D'autre part, une variété fermée est une variété sans bord et compacte.

Soit M une variété différentielle lisse de dimension n , pour $p \in M$, on note $T_p M$ l'espace tangent au point p et $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ le fibré tangent. Une métrique g est une application qui à chaque point $p \in M$ associe un produit scalaire g_p défini sur $T_p M$. On dit que (M, g) est une variété riemannienne. Voici quelques notations standard, pour les explications on peut consulter par exemple [GHL].

- Pour (E, π, M, F) un fibré vectoriel, de base M , d'espace total E , de submersion s et de fibre $F \cong \pi^{-1}(x)$. On note $\Gamma(E)$: l'espace des sections lisses de ce fibré (i.e $s \in \Gamma(E)$, si $s : M \rightarrow E$ et $\pi \circ s = \text{identité}$).

- En particulier, $\Gamma(TM)$ est l'espace vectoriel des champs de vecteurs lisses sur M .

- Pour $v \in T_p M$, on note $|v| := g(v, v)^{1/2}$.

- Pour $p \in M$, on note $T_p^* M$ le fibré dual de $T_p M$.

- $T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M$ le fibré cotangent de M .

- La métrique donne une bijection naturelle entre $\Gamma(TM)$ et $\Gamma(T^* M)$:

$$\flat : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^* M) \quad X^\flat := g(X, \cdot),$$

$$\text{Inversement, } \sharp : \Gamma(T^* M) \rightarrow \Gamma(TM) \quad g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y) \quad \forall Y \in \Gamma(TM).$$

- $C^k(M)$ l'espace vectoriel des fonctions de M dans \mathbb{R} dont les k -ièmes dérivées partielles existent et sont continues par rapport à un choix de coordonnées lisses.

- Le gradient d'une fonction $f \in C^1(M)$, est $\nabla f := (df)^\sharp$

C'est donc une application linéaire qui vérifie la Loi de Leibniz.

- Pour une fonction $f \in C^1(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$, la dérivée directionnelle de f par rapport à X est parfois notée $X.f$ (i.e $X.f(p) := d_p f(X) = g_p(\nabla f(p), X(p))$).
- Pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ il existe un unique $Z \in \Gamma(TM)$, noté $[X, Y]$ et appelé le crochet de Lie de X et Y , tel que pour $f \in C^2(M)$, $X.Y.f - Y.X.f = Z.f$.

1.2.1. Connexion de Levi-Civita

La connexion de Levi-Civita est une application définie de façon axiomatique comme l'unique application, la métrique g étant fixée, satisfaisant les propriétés suivantes:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

- (1) $C^k(M)$ -linéarité par rapport à la première entrée,
- (2) pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^1(M)$, $\nabla_X(f \cdot Y) = (X.f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$,
- (3) elle est sans torsion (i.e $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$),
- (4) pour trois champs de vecteurs X, Y et Z ,

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Définition 1.1. Pour $X \in \Gamma(TM)$, ∇X est un endomorphisme de TM et on définit la divergence de X au point p par la formule $\text{div}(X)(p) := \text{tr}_{T_p M}(\nabla X)(p)$.

Donc $\text{div}(X)(p) = \sum_{i=1}^n g_p(\nabla_{e_i} X(p), e_i)$, où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base orthonormale de $T_p M$. L'application $\text{div} : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$ est linéaire et vérifie pour $f \in C^1(M)$, on a $\text{div}(f \cdot X) = f \cdot \text{div} X + g(\nabla f, X)$.

1.2.2. Calcul en coordonnées locales

Soit n la dimension de M , pour $p \in M$ on choisit une carte trivialisante (U, x) , c'est-à-dire les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n et notons $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ la base de $\Gamma(TU)$ associée. Notons $G = (g_{ij}) = (g(\partial_i, \partial_j))$ la matrice représentant la métrique g dans cette base, posons $G^{-1} = (g^{ij})$ et $|G|$ son déterminant.

Pour $f \in C^1(M)$ et $X = \sum_{j=1}^n \eta_j \partial_j$, $Y = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_j \in \Gamma(TU)$, on peut exprimer en coordonnées locales :

- $\nabla f = \sum_{k,l=1}^n (g^{kl} \partial_l f) \partial_k$,
- En posant $\nabla_{\partial_j} \partial_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$, $\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n \eta_j \{ \partial_j \xi_i + \sum_l \xi_l \Gamma_{lj}^i \} \partial_i$,
- $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{j=1}^n \partial_j (\eta_j \sqrt{|G|})$.

On peut se référer à [C1] pour les détails des calculs précédents.

1.2.3. Le Laplacien

Pour $k \geq 2$, on définit le Laplacien $\Delta := \operatorname{div} \circ \nabla : C^k(M) \rightarrow C^{k-2}(M)$.

Pour $f \in C^2(M)$, en coordonnées locales, avec les mêmes notations on obtient :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \sqrt{|G|} \partial_j f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i \partial_j f + \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \partial_j f$$

où $\alpha_{ij} = \partial_i (g^{ij} \sqrt{|G|})$. Le Laplacien est un opérateur différentiel linéaire, d'ordre 2, elliptique, c'est-à-dire qu'en chaque point la matrice correspondant au terme principal (g^{ij}) est définie positive. Pour $f, h \in C^2(M)$, on a : $\Delta(fh) = h(\Delta f) + 2g(\nabla h, \nabla f) + f(\Delta h)$.

Dans \mathbb{R}^n , avec les notations usuelles, on a $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$.

1.2.4. Géodésiques, distance et coordonnées normales

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse. Une géodésique sur M est une courbe lisse $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, telle que $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$. Ici, $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)$, n'est pas définie a priori, on doit prendre une extension de $\gamma'(t)$ sur un voisinage de γ . Il est connu que la valeur de $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)$ ne dépend pas de l'extension choisie [GHL]. De plus, $\frac{d}{dt} |\gamma'(t)| = \gamma'(t) \cdot g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 2g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Donc $|\gamma'(t)|$ est constante le long de $\gamma(t)$, ce qui nous permet de normaliser.

On peut définir une distance sur (M, g) , une variété riemannienne connexe, comme suit : pour $p, q \in M$ on prend

$$d_g(p, q) := \inf \left\{ \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, C^1, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \right\}$$

S'il existe une courbe C^1 qui joint p et q et dont la longueur vaut la distance entre p et q , alors cette courbe est une géodésique. Pour une variété compacte, il y a toujours au moins une géodésique réalisant la distance entre deux points distincts.

Définition 1.2. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, est dit convexe si pour tout couple de points de Ω distincts, (p, q) , l'unique géodésique (segment de droite) de \mathbb{R}^n qui relie p et q est contenue dans Ω .

Un domaine convexe est connexe.

Théorème 1.3. Soit (M, g) , une variété riemannienne lisse, $\forall p \in M$, il existe $U \subset M$, voisinage de p , et $\epsilon > 0$ tels que $\forall q \in U$ et $\forall v \in T_q U$ satisfaisant $|v| < \epsilon$, il existe une unique géodésique, notée $c(p, v, \cdot) : (-1, 1) \rightarrow U$ telle que $c(p, v, 0) = q$ et $\frac{d}{dt} c(p, v, t)|_{t=0} = v$.

Si M est compacte, $c(p, v, \cdot)$ est définie sur tout \mathbb{R} .

Pour des explications plus détaillées et les preuves on peut consulter par exemple [GHL].

Définition 1.4. Soit (M, g) , une variété riemannienne lisse et compacte, p un point de M , et $U \subset M$, l'un de ses voisinages, comme décrit dans le théorème précédent. On définit l'application exponentielle au point p , $\exp : TU \rightarrow M$, par $\exp(q, v) := c(q, v, 1)$.

Remarque 1.5. Remarquons que $\exp(q, tv) = c(q, v, t)$ et notons $\exp_p := \exp|_{T_p M}$. L'application $(p, tv) \mapsto (p, \exp_p tv)$ est un C^∞ -difféomorphisme de l'ouvert $B_\epsilon(0) \subset T_p M$ (donné par le dernier théorème) sur son image dans $M \times M$.

Pour $p \in M$, on définit les **coordonnées normales** pour un ouvert $V_\epsilon = \exp_p(B_\epsilon(0))$ autour de p . En choisissant $(e_i)_{i=1}^n$ une base (ordonnée) orthonormale de $T_p M$, et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les coordonnées données par $\exp_p(te_i)$ autour de

p , on a $g_p((\partial_{x_i})_p, (\partial_{x_j})_p) = g_p(c'(p, e_i, 0), c'(p, e_j, 0)) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Ceci nous permet d'affirmer que pour tout point $p \in M$, il existe un système de coordonnées pour lesquelles la métrique est l'identité et le Laplacien s'exprime en ce point là par la formule

$$\Delta f(p) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \sqrt{|G|} \partial_j f)(p) = \sum_{j=1}^n (\partial_j^2 f(p) + \alpha_j(p) \cdot \partial_j f(p))$$

où $\alpha_j(p) = \sum_{i=1}^n \partial_i (g^{ij}(p) \sqrt{|G(p)|})$.

Les coordonnées normales pour un ouvert $V_\epsilon = \exp_p(B_\epsilon(0))$ autour de $p \in M$ définissent naturellement un difféomorphisme de V_ϵ dans \mathbb{R}^n .

1.2.5. Action du groupe d'isométries sur une variété riemannienne

Définition 1.6. Une application $\tau : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une :

- 1 - **isométrie locale** si c'est un difféomorphisme local qui préserve la métrique (i.e $(\tau^* h)_p := h_{\tau(p)}(d\tau_p(\cdot), d\tau_p(\cdot)) = g$, en tout point p de M),
- 2 - **isométrie** si c'est un difféomorphisme et une isométrie locale.

Si (M, g) et (N, h) sont isométriques, on a $(M, g) = (N, h)$ au sens riemannien.

L'identité du groupe d'isométries est définie comme l'action triviale.

Évidemment, une isométrie préserve la distance d_g que l'on a définie sur M , dans la section 1.2.4. Moins trivialement, on peut montrer qu'une application lisse et bijective qui préserve la distance est une isométrie (voir [GHL]).

Nous aurons besoin de quelques résultats et notions plus ou moins classiques sur l'action du groupe d'isométries sur une variété riemannienne (M, g) , ce groupe est noté $\text{Isom}(M, g)$.

Notons $\text{Stab}_p G := \{\tau \in G \mid \tau(p) = p\}$ le stabilisateur de p dans G et pour $\tau \in G$ notons $\text{Fix}_\tau M := \{p \in M \mid \tau(p) = p\}$, l'ensemble des points fixes de l'action de τ sur M .

Proposition 1.7. Soit τ, σ deux isométries de (M, g) , une variété riemannienne connexe, telles que $\tau(p) = \sigma(p)$ et $d_p \tau = d_p \sigma$ pour un certain $p \in M$ alors $\tau = \sigma$.

L'idée de la preuve de cette proposition est d'utiliser que $f := \tau^{-1} \circ \sigma$ est alors dans le stabilisateur de p ainsi que $d_p f = id_p : T_p M \rightarrow T_p M$. Or, la différentielle d'un élément du stabilisateur commute avec l'exponentielle, dans le sens où $f(\exp_p v) = \exp_p(d_p f(v))$ (ceci se démontre en considérant l'unicité des géodésiques) donc f est l'identité sur un ouvert contenant p . L'argument se répète pour tous les éléments de l'ouvert et par connexité de M , la proposition est démontrée.

Corollaire 1.8. 1- Soit (M, g) une variété riemannienne connexe, le seul élément de son groupe d'isométries, dont l'ensemble des points fixes contient un ouvert, est l'identité.

2- Il y a un homomorphisme injectif de $\text{Stab}_p G$ dans $O(n, \mathbb{R})$ donné par la différentielle et le choix d'une base orthonormée de $T_p M$ (i.e $\tau \in \text{Stab}_p G$ donc $d_p \tau : T_p M \rightarrow T_p M$ est une application linéaire qui préserve le produit scalaire).

Proposition 1.9. Pour $\tau \in \text{Isom}(M, g)$, M connexe, $\text{Fix}_\tau M$ est un ensemble de sous-variétés de codimension au moins 1.

Cette proposition se démontre avec l'exponentielle.

Définition 1.10. Une variété différentielle est dite **orientable** s'il est possible de trouver un atlas dont le Jacobien des applications de changement de cartes est toujours positif.

En supposant qu'une variété riemannienne donnée (M, g) soit orientable, on peut choisir un atlas orienté (U_i, ϕ_i) et définir l'homomorphisme de groupes signe:

$$\text{sg} : \text{Isom}(M, g) \rightarrow \{1, -1\}$$

qui pour $\tau \in G$ donne le signe du déterminant de la Jacobienne associée en un point de M . Cette application est bien définie pour plusieurs raisons: les changements de cartes n'affectent pas le déterminant, prendre un autre atlas orienté

ne change pas cet homomorphisme et comme τ est un difféomorphisme, le déterminant de la Jacobienne associée ne s'annule jamais, son signe est donc constant sur toute la variété.

Définition 1.11. *Pour (M, g) une variété orientée, on dit que $\tau \in \text{Isom}(M, g)$ change l'orientation si $sg(\tau) = -1$.*

Définition 1.12. *Soit G un groupe et V un espace vectoriel sur un corps K . Une représentation ρ de G est un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ où $\text{GL}(V)$ est le groupe des automorphismes K -linéaires.*

Les groupes qui vont nous intéresser sont finis et les espaces vectoriels sont réels et de dimension finie. Dans ce cas, en choisissant une base de V , on a $\text{GL}(V) \cong \text{GL}(n, \mathbb{R})$, où $n = \dim V$. On nomme alors un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ une représentation matricielle.

Pour $p \in M$ et $G = \text{Isom}(M, g)$, par le Corollaire 1.8, on a une représentation injective de $\text{Stab}_p G$ dans $T_p M$.

Définition 1.13. *Soient $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations de G . On dit qu'elles sont **équivalentes** s'il existe un opérateur linéaire bijectif, $T : V_1 \rightarrow V_2$, tel que pour tout $g \in G$, $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$. On appelle cet opérateur un opérateur **d'entrelacement**.*

Soit $\tau \in G$, $[\tau] := \{\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \mid \sigma \in G\}$ est la **classe de conjugaison** de τ dans G . Les classes de conjugaison sont des classes d'équivalence sur G . Pour une représentation matricielle ρ de G , on définit son caractère χ_ρ comme le vecteur dont chacune des coordonnées est la trace d'un représentant d'une des classes de conjugaison. Pour un groupe fini G et ρ_1, ρ_2 deux représentations matricielles de G , une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient équivalentes est qu'elles aient le même caractère.

1.3. INTÉGRATION, THÉORÈME DE GREEN

Soit (M, g) une variété riemannienne à bord, en prenant un voisinage tubulaire de la variété (à homéomorphisme près), on peut considérer ∂M comme une sous-variété de dimension $n - 1$, munie de la topologie et de la métrique induites. Dans ce cas, pour un point $p \in \partial M$, $T_p M$ est de dimension n . On note ν_p le vecteur normal extérieur au point p , c'est-à-dire $\nu_p \perp T_p(\partial M)$, où l'on considère, par abus de notation, $T_p(\partial M) \subset T_p M$.

On note dV_g , ou simplement dV si aucune confusion n'est possible, la mesure riemannienne associée à la métrique g . C'est-à-dire que l'on prend un atlas orienté $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$, que l'on peut choisir fini par compacité, et ϕ_i une partition lisse de l'unité associée à ce recouvrement (i.e. $\forall i \in I$, $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$ et $\forall p \in M$, $\phi_i(p) \geq 0$ et $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$). Pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, on note

$$\int_M f dV_g = \sum_{i \in I} \int_{\psi_i(U_i)} (f \cdot \phi_i) \circ \psi_i^{-1} \cdot \sqrt{|G_i|} d\mu$$

où G_i est la matrice associée à la métrique dans la base trivialisante de U_i et $d\mu$ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la trivialisations. À partir de là, on peut définir la notion de fonction mesurable, fonction intégrable et les espaces L^p associés. Les précisions nécessaires sont expliquées dans [GHL].

On note dA la mesure induite par dV , sur le bord de M , et pour (M, g) , une variété de dimension n , notons $\text{Vol}_n(M, g) := \int_M dV_g$, si aucune confusion n'est possible on omet la dimension et la métrique dans la notation. De plus, on note $\text{Aire}(M) := \int_{\partial M} dA_g$.

Théorème 1.14 (Green). *Pour X , un champ de vecteur C^1 et $f, h \in C^2(M)$,*

$$\begin{aligned}
\int_M \operatorname{div} X dV &= \int_{\partial M} g(X, \nu) dA \\
\int_M h \Delta f + g(\nabla f, \nabla h) dV &= \int_{\partial M} h \partial_\nu f dA \\
\int_M (h \Delta f - f \Delta h) dV &= \int_{\partial M} (h \partial_\nu f - f \partial_\nu h) dA
\end{aligned}$$

Pour les preuves on peut consulter [GHL], les deux dernières égalités s'obtiennent de la première en remplaçant X par le gradient des fonctions f et h .

On note de façon standard : $L^2(M)$: l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur M . Pour $f, h \in L^2(M)$, $(f, h) := \int_M f \cdot h dV$ et $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$.

$\mathcal{L}^2(M)$: l'espace de Hilbert des champs de vecteurs dont la norme est intégrable sur M où l'on note $\langle X, Y \rangle := \int_M g(X, Y) dV$ et $\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle}$.

1.4. LE SPECTRE DU LAPLACIEN

Pour (M, g) , une variété riemannienne compacte sans bord, le Laplacien $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ est un opérateur auto-adjoint par rapport au produit scalaire sur $L^2(M)$. De plus, sur une variété à bord, le Théorème de Green nous montre que dans le cas où l'on se restreint aux fonctions satisfaisant des conditions adéquates au bord, le Laplacien est aussi auto-adjoint.

Définition 1.15. Soit E un espace linéaire complexe et $T : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire et continu,

$\operatorname{Reg}(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid (T + zI)^{-1} \text{ est défini et continu sur } E \text{ en entier}\}$

Le **spectre** $\operatorname{Spec}(T) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Reg}(T)$.

Les **valeurs propres** de T sont les nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un $x \in E \setminus \{0\}$, vérifiant $(T + \lambda I)x = 0$.

L'espace propre associé à une valeur propre donnée λ , est noté E_λ et est constitué de l'ensemble des vecteurs propres (ou fonctions propres), c'est-à-dire des $x \in E$, vérifiant $(T + \lambda I)x = 0$.

Pour une valeur propre donnée λ , si la dimension de E_λ est finie on la nomme la **multiplicité** de λ .

Dans ce qui suit, nous étudierons le spectre du Laplacien sur une variété riemannienne compacte pour quatre types de problèmes donnant un Laplacien auto-adjoint. Pour ces problèmes, le spectre du Laplacien correspond à ses valeurs propres. C'est une suite discrète, monotone et divergente de nombre réels positifs, notée $\{0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty\}$ où l'on répète chaque valeur propre un nombre de fois égal à sa multiplicité qui est finie. Ceci se démontre en étudiant les solutions faibles de l'équation $\Delta u = f$. On peut consulter [Br] pour la preuve. La compacité de la variété est nécessaire pour ce résultat, on suppose pour le moment la variété et son bord lisses.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe et à bord (peut-être vide). Pour deux ouverts $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial M$ tels que $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial M$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, on considère l'ensemble des fonctions non-nulles s'annulant sur Γ_D et dont la dérivée directionnelle extérieure s'annule sur Γ_N .

$$\begin{aligned} \text{Spec}(M, \Gamma_D) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in C^2(M) \cap C^1(M \cup \Gamma_N) \cap C^0(\bar{M}), f \neq 0, \\ &\quad \text{telle que } \Delta f + \lambda f = 0, f|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } (\partial_\nu f)|_{\Gamma_N} = 0\} \\ &= \{0 \leq \lambda_1(\Gamma_D) \leq \lambda_2(\Gamma_D) \leq \dots \rightarrow +\infty\} \end{aligned}$$

La situation générale ci-dessus se traite habituellement comme quatre problèmes distincts.

1 - Le problème fermé. Lorsque $\partial M = \emptyset$, c'est-à-dire que (M, g) est une variété riemannienne compacte, connexe et fermée. La première valeur propre est nulle et correspond aux fonctions constantes. On note le spectre associé $\text{Spec}(M)$.

2 - Le problème de Dirichlet. Lorsque $\Gamma_D = \partial M \neq \emptyset$. On note le spectre associé $\text{Spec}_D(M)$.

3 - Le problème de Neumann. Lorsque $\Gamma_D = \emptyset$ mais que $\partial M \neq \emptyset$. On appelle parfois ce problème: "problème aux frontières libres". On note le spectre associé $\text{Spec}_N(M)$. La première valeur propre est nulle et correspond aux fonctions constantes.

4 - Le problème mixte. Lorsque $\Gamma_D \neq \emptyset$, $\Gamma_D \neq \partial M$. On appelle parfois ce problème: "problème de Zaremba", en particulier lorsque $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} \neq \emptyset$.

Notations, remarques et conventions

Pour $\Gamma \subset \partial M$, notons $\Gamma^c = \partial M \setminus \Gamma$.

Comme $\Gamma_D^c \setminus \Gamma_N$ est un ensemble de points isolés, le choix de Γ_D détermine le spectre, d'où la notation.

Habituellement, dans la littérature, on spécifie la métrique dans la notation du spectre. Dans notre cas, la métrique d'une variété est préalablement fixée, on ne la fera pas varier mais plutôt les conditions au bord dans les chapitres 2 et 3. C'est pourquoi cette notation est adoptée.

Afin d'alléger le texte, considérons dorénavant qu'une variété fermée est une variété à bord, dont le bord est vide. Ainsi pour $\Gamma \subset \partial M = \emptyset$, $\text{Spec}(M, \Gamma) = \text{Spec}(M)$. On considère donc de façon générale $\text{Spec}(M, \Gamma) = \{0 \leq \lambda_1(\Gamma) \leq \lambda_2(\Gamma) \leq \dots \rightarrow +\infty\}$.

1.4.1. Les fonctions propres

Pour (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe avec ou sans bord, de spectre $\text{Spec}(M, \Gamma)$, on peut associer une suite de fonctions propres, c'est-à-dire une suite $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$ on ait $\Delta \phi_i + \lambda_i \phi_i = 0$, ϕ_i vérifiant les conditions

au bord déterminées par Γ . De plus, ces fonctions sont lisses à l'intérieur en tant que fonctions propres de $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ et on peut les choisir de façon à ce qu'elles forment une base hilbertienne de $L^2(M) \cap \{f|_\Gamma = 0\}$. On note $\mathcal{B}_\Gamma = (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de fonctions propres du Laplacien sur M qui s'annulent sur Γ et si $\Gamma^c \neq \emptyset$, on leur impose, de plus, que leur dérivée directionnelle extérieure s'annule à l'intérieur de Γ^c . On note $E_{\lambda_i}(M, \Gamma)$ (ou simplement $E_{\lambda_i}(\Gamma)$ si aucune confusion n'est possible) l'espace propre associé à λ_i , la dimension de E_{λ_i} est finie.

Identités de Parseval: $\forall f \in L^2(M) \cap \{f|_\Gamma = 0\}$, $f = \sum_i (f, \phi_i) \phi_i$ dans $L^2(M)$ et $\|f\|^2 = \sum_i (f, \phi_i)^2$.

Comme solutions de l'opérateur elliptique $\Delta + \lambda I$, pour certains $\lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma)$, les fonctions propres possèdent des propriétés très fortes. Voici quelques résultats qui seront utiles pour la suite et qui donnent un bref aperçu de ces propriétés.

Définition 1.16. *Pour $f \in C^\infty(M)$ et $p \in M$, l'ordre d'annulation de f en p est, s'il existe, le plus petit entier $k \geq 0$, tel qu'il existe un n -uplet de nombres entiers positifs ou nuls (i_1, \dots, i_n) tels que $\sum_{l=1}^n i_l = k$ et*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(p) \neq 0$$

Si un tel entier n'existe pas on dit que l'ordre d'annulation de f est infini.

Par exemple, si f ne s'annule pas en p , alors son ordre d'annulation est nul. Un polynôme homogène d'ordre N (i.e dont tous les monômes sont de degré N) a un ordre d'annulation d'ordre N à l'origine.

Théorème 1.17 (N. Aronszajn, 1957). *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe, et $L = \Delta + L_1 + L_0$ où L_1 et L_0 sont des opérateurs d'ordres 1 et 0 respectivement.*

Soit ϕ une fonction satisfaisant $L\phi = 0$, si ϕ s'annule à un point d'ordre infini (i.e si toutes les dérivées de ϕ s'annulent à ce point) alors $\phi \equiv 0$ sur M .

(Voir [A]).

En particulier, sur une variété riemannienne connexe et compacte une fonction propre non-nulle du Laplacien ne peut s'annuler sur un ouvert.

Théorème 1.18 (Principe du Maximum). *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et $\phi \in C^2(M)$ une fonction bornée qui satisfait $\Delta\phi \geq 0$. Supposons qu'il existe $p \in M$ tel que $\phi(p) = \sup_{q \in M} \phi(q)$. Alors ϕ est constante sur M .*

Théorème 1.19 (Lemme de Hopf). *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe à bord et $\phi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ une fonction bornée qui satisfait $\Delta\phi \geq 0$ sur M . Supposons qu'il existe $p \in \partial M$ tel que $\phi(p) = \sup_{q \in \overline{M}} \phi(q)$ et que p est aussi sur le bord d'une boule incluse dans M (par exemple ce n'est pas un point singulier d'un angle). Alors, si elle existe, $(\partial_\nu \phi)|_p > 0$.*

Pour les preuves des deux derniers théorèmes dans le cas de domaines euclidiens, on peut consulter par exemple [GT] et plus généralement [Ta].

1.4.1.1. Existence et régularité des solutions

Pour le problème fermé 1 sur une variété lisse compacte, l'existence des fonctions propres lisses est bien connue. Dans les cas où la variété est lisse avec un bord non-vide, lisse et que l'on impose des conditions homogènes au bord (pure Dirichlet ou pure Neumann), encore une fois, l'existence et la régularité des solutions sont des résultats classiques que l'on peut trouver dans [Ta]. Cependant, pour le problème mixte, l'existence et la régularité ne sont pas évidentes même si le bord est lisse. En effet, supposons que le bord non-vide soit connexe et partagé en deux parties comme dans l'énoncé du problème 4, nous verrons plus loin, à la section 1.5, que la première fonction propre peut être choisie strictement négative à l'intérieur de la variété. Elle satisfait alors les hypothèses du Théorème 1.19 et par continuité, la fonction et sa dérivée directionnelle extérieure (si elle existe) s'annulent sur les points de rencontre de la partition du bord (Neumann-Dirichlet) ce qui contredit le Théorème 1.19. Ainsi, on peut conclure qu'en considérant sur M , une variété lisse avec un bord non-vide et lisse, le problème mixte déterminé par une partition

$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial M$ telle que $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} \neq \emptyset$, les fonctions propres, si elles existent, ne seront pas lisses sur la fermeture de M mais seulement dans l'intérieur. Elles seront C^1 sur $M \cup \Gamma_N$ mais pas plus que continues sur \overline{M} . L'existence de telles solutions est un sujet moins classique, on peut trouver un survol des résultats d'existence et de régularité par Miranda [M]. Il déclare, entre autres, que Stampacchia a montré l'existence des solutions par des méthodes variationnelles. Ces solutions se trouvent dans $H^{1,2}(M)$, c'est-à-dire qu'elles sont de carré intégrable et possèdent un gradient au sens faible (voir section 1.5) dont la norme au carré est intégrable. D'autre part, nous serons intéressé par les types de problèmes 2 à 4 pour des variétés lisses dont le bord, non-vide, est lisse par morceaux. Par exemple, un polygone euclidien ou hyperbolique. Dans ces cas, le spectre n'est pas nécessairement discret, il existe en effet des exemples de domaines dans \mathbb{R}^2 qui donnent un spectre Neumann continu. Pour nous assurer que ceci ne sera pas le cas dans les exemples à venir, nous pouvons restreindre notre étude aux domaines **Lipschitz** (i.e dont le bord est localement le graphe d'une fonction Lipschitz f telle qu'il existe $K \geq 0$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$). Géométriquement, un domaine Lipschitz est un domaine satisfaisant la condition de cône, intérieure et extérieure. Cette condition est que chaque point du bord est le sommet d'un cône d'angle non-nul contenu à l'intérieur du domaine et le sommet d'un cône d'angle non-nul contenu à l'extérieur du domaine. Évidemment, cette condition n'a de sens que dans le cas d'un **domaine**, c'est-à-dire d'une sous-variété ouverte et "bornée" par rapport à une autre variété lisse. Habituellement, les domaines qui vont nous intéresser sont les domaines euclidiens (i.e contenus dans \mathbb{R}^n). Encore une fois, les solutions seront lisses à l'intérieur mais pas aux points irréguliers de la frontière, l'existence et la régularité sont montrées dans [Ta].

Dans ce qui suit, les variétés considérées seront toujours lisses et leur bord, s'il est non-vide, sera Lipschitz.

1.4.2. Action du groupe d'isométries sur les fonctions

Soit $\text{Isom}(M, g)$ le groupe des isométries de (M, g) . Ce groupe a une action linéaire naturelle sur l'espace des fonctions de M : si $\tau \in \text{Isom}(M, g)$ et f, h sont des fonctions définies sur M , alors $f \circ \tau$ en est une aussi et $(f + h) \circ \tau = f \circ \tau + h \circ \tau$. Évidemment, si on travaille sur le problème mixte déterminé par $\Gamma \subset \partial M$, on s'intéresse aux isométries qui préservent les conditions au bord des fonctions, c'est-à-dire au groupe: $\text{Isom}(M, g, \Gamma) := \{\tau \in \text{Isom}(M, g) \mid \tau(\Gamma) = \Gamma\}$. On notera $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$ par $\text{Isom}(M, \Gamma)$ si aucune confusion n'est possible.

On va montrer ci-dessous que l'action de précomposition par les éléments de $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$ préserve le spectre et les espaces propres du Laplacien.

Si $\tau \in \text{Isom}(M, g, \Gamma)$, sa différentielle, $d\tau : TM \rightarrow TM$, vérifie $d\tau(\nabla_p(f \circ \tau)) = \nabla_{\tau(p)}f$ parce que $\forall X_{\tau(p)} \in T_{\tau(p)}M$ on a

$$\begin{aligned} g_{\tau(p)}(d\tau \nabla_p(f \circ \tau), X_{\tau(p)}) &= g_{\tau(p)}(d\tau \nabla_p(f \circ \tau), d\tau \circ d\tau^{-1}(X_{\tau(p)})) \\ &= g_p(\nabla_p(f \circ \tau), d\tau^{-1}(X_{\tau(p)})) = d_p(f \circ \tau)(d\tau^{-1}(X_{\tau(p)})) \\ &= d_{\tau(p)}f \circ d\tau \circ d\tau^{-1}(X_{\tau(p)}) = d_{\tau(p)}f(X_{\tau(p)}) \end{aligned}$$

D'autre part, la connexion de Lévi-Civita est préservée par une isométrie locale. En effet, on peut vérifier que l'application $(X, Y) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow (d\tau)^{-1} \nabla_{d\tau(X)} d\tau(Y)$ satisfait les propriétés de la définition.

Ces dernières propriétés impliquent que $(\Delta(f \circ \tau)) \circ \tau^{-1} = \Delta f$, pour les Laplaciens évalués en des points adéquats.

La précomposition par des isométries est une action linéaire de $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$ sur chacun des espaces propres $E_\lambda(M, \Gamma) := \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f + \lambda f = 0, f|_\Gamma = 0\}$ pour tout $\lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma)$. $E_{M, \lambda}$ étant un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , en prenant une base vectorielle, on obtient une représentation matricielle du groupe $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$ dans E_λ , que l'on notera $g \mapsto A_g^\lambda$.

1.5. CARACTÉRISATION VARIATIONNELLE DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN

1.5.1. Fonctions admissibles et Théorème de Rayleigh

Définition 1.20. Pour $f \in L^2(M)$, on dit que $X \in \mathcal{L}^2(M)$ est le gradient faible de f si X est tel que

$$\langle X, Y \rangle = -(f, \operatorname{div} Y)$$

pour tout champ de vecteurs Y au moins une fois différentiable et à support compact dans M . S'il existe, il est unique et on le note $\operatorname{Grad} f$.

Pour une fonction C^1 , le gradient faible correspond au gradient usuel. Cette notion nous permettra d'appliquer le Théorème de Green à des fonctions qui ne sont pas différentiables au sens fort. Avec le Théorème de Rayleigh (ci-dessous), ces fonctions pourront servir de fonctions tests et nous permettrons d'estimer les valeurs propres. Dans le cas où l'on étudie des variétés à bord avec conditions mixtes ou de Dirichlet, nous devons imposer certaines conditions à nos fonctions pour qu'elles soient des fonctions tests admissibles pour le problème considéré, d'où l'utilité de définir les ensembles suivants:

Définition 1.21.

- 1- On note $\mathcal{H}(M)$, le sous-espace de $L^2(M)$ des fonctions possédant un gradient faible dont le carré de la norme est intégrable ($\mathcal{H}(M) = H^{1,2}(M)$).
- 2- Par le Théorème de Green et la définition de la divergence, une fonction continue et lisse par morceaux sur \overline{M} est dans $\mathcal{H}(M)$.
- 3- On note $\mathcal{H}(M, \Gamma) = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f|_{\Gamma} = 0\}$. On nomme $\mathcal{H}(M, \Gamma)$ l'espace des **fonctions admissibles**. Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(M, \Gamma)$.

Remarque 1.22.

La notation $\mathcal{H}(M, \Gamma)$ convient au cas où M est fermée.

Les fonctions de $\mathcal{H}(M, \Gamma)$ ne satisfont pas nécessairement les conditions de Neumann dans l'intérieur de Γ^c .

Pour $f, h \in \mathcal{H}(M)$, on note $D[f, h] := \langle \text{Grad } f, \text{Grad } h \rangle$ et $\mathbf{R}[f] := \frac{D[f, f]}{\|f\|^2}$.

Pour $f \in \mathcal{H}(M)$ et $\phi \in C^2(M)$, $D[f, \phi] = -(f, \Delta \phi) + \int_{\partial M} f \cdot \partial_\nu \phi \, dA$, par Green.

En particulier, si $f \in \mathcal{H}(M, \Gamma)$ et ϕ est une fonction propre associée à $\text{Spec}(M, \Gamma)$, on a $D[f, \phi] = -(f, \Delta \phi)$.

Théorème 1.23 (Rayleigh).

1- Soit $f \in \mathcal{H}(M, \Gamma)$, alors $\mathbf{R}[f] \geq \lambda_1(\Gamma)$

avec égalité si et seulement si f est dans l'espace propre de $\lambda_1(\Gamma)$.

2- Soit $f \in \mathcal{H}(M, \Gamma)$ et $f \perp \phi_i$, $\phi_i \in \mathcal{B}_\Gamma$ pour $i = 1, \dots, k-1$ alors $\mathbf{R}[f] \geq \lambda_k(\Gamma)$

avec égalité si et seulement si f est dans l'espace propre de $\lambda_k(\Gamma)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(M, \Gamma)$ et $f \perp \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k-1}$ et $m > k$. Posons $\alpha_i := (f, \phi_i)$. Considérons $f - \sum_{j=k}^m \alpha_j \phi_j$, par définition et bilinéarité on a

$$0 \leq D[f - \sum_{j=k}^m \alpha_j \phi_j, f - \sum_{j=k}^m \alpha_j \phi_j] = D[f, f] + 2 \sum_{j=k}^m \alpha_j (\Delta \phi_j, f) - \sum_{i,j=k}^m \alpha_i \alpha_j (\phi_i, \Delta \phi_j)$$

Les fonctions $\{\phi_i\}$ étant orthonormales, on obtient : $0 \leq D[f, f] - \sum_{j=k}^m \lambda_j \alpha_j^2$.

En passant à la limite et par l'identité de Parseval:

$$D[f, f] \geq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j^2 \geq \lambda_k \|f\|^2.$$

Le cas de l'égalité est direct. \square

Corollaire 1.24. Étant donné que pour $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \partial M$, $\mathcal{H}(M, \Gamma_2) \subset \mathcal{H}(M, \Gamma_1)$ alors $\lambda_1(\Gamma_1) \leq \lambda_1(\Gamma_2)$. En particulier $\lambda_1(\emptyset) \leq \lambda_1(\Gamma_2) \leq \lambda_1(\partial M)$.

Il est aussi immédiat que pour $\Omega \subset M$ et n'importe quel $\Gamma \subset \partial M$, $\lambda_1(M, \Gamma) \leq \lambda_1(\Omega, \partial \Omega)$. Il suffit d'étendre trivialement les fonctions de Ω s'annulant sur son bord pour construire des fonctions tests pour le problème considéré sur M . En fait, on peut montrer un résultat plus fort : le Principe de Monotonie.

1.5.2. Principe de Monotonie

Théorème 1.25. *Supposons que M soit partitionnée en un nombre fini de domaines Lipschitz notés $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ (i.e $\overline{M} = \overline{\Omega}_1 \cup \dots \cup \overline{\Omega}_m$ et $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $i \neq j$). Pour $\Gamma \subset \partial M$ et $i \in \{1, \dots, m\}$ notons $\Gamma_i := \partial\Omega_i \cap (M \cup \Gamma)$ et*

$$\bigcup_{i=1}^m \text{Spec}(\Omega_i, \Gamma_i) = \{\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots\} \quad \text{et} \quad \text{Spec}(M, \Gamma) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}$$

alors $\lambda_k \leq \nu_k$. En particulier, $\lambda_k \leq \lambda_k(\Omega_i, \Gamma_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

La démonstration se trouve dans [C1].

1.5.3. Théorème de Courant

Ensemble nodal et domaines nodaux. Pour f une fonction de M à valeurs réelles, on définit l'ensemble nodal $N_f := \{p \in M \mid f(p) = 0\}$ et les composantes connexes de $M \setminus N_f$ sont appelées les domaines nodaux.

Si f est lisse et que N_f ne contient aucun point critique, le Théorème des fonctions implicites nous assure que N_f est une sous-variété de dimension $n - 1$.

La restriction d'une fonction propre à un de ses domaines nodaux D est une fonction propre sur cet *ensemble* et elle satisfait les conditions de Dirichlet sur $\partial D \cap M$ et les mêmes conditions que la fonction de départ sur $\partial D \cap \partial M$. On s'intéresse donc d'abord à savoir si cet ensemble est bien une variété lisse ou topologique. Puis nous verrons que l'on peut caractériser partiellement les ensembles nodaux d'une fonction propre par rapport au rang de la valeur propre associée.

Lorsque la variété M est de dimension 2, Cheng a démontré dans [Ch] que dans un voisinage d'un point critique $p \in N_f$, la fonction propre du Laplacien, f , se comporte, à difféomorphisme près, comme un polynôme homogène d'ordre N sur \mathbb{R}^2 . L'ordre du polynôme est déterminé par l'ordre d'annulation de f et le

difféomorphisme par le choix de coordonnées normales. En fait ceci se démontre à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1.26 (L. Bers). *Soit $m < n$ et*

$$L = \sum_{j=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_j} a_{i_1, \dots, i_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_j^{i_j}} \quad \text{où } k_j := \sum_{l=1}^j i_l$$

un opérateur elliptique à coefficients définis et lisses autour de l'origine de \mathbb{R}^n . Soit ϕ une solution de $L\phi = 0$, alors ϕ s'annule à un ordre $N < \infty$ en les points où elle s'annule et il existe P_N un polynôme homogène d'ordre N , tel que, près de l'origine on ait, pour $0 < \epsilon < 1$:

$$\phi(x) = P_N(x) + O(|x|^{N+\epsilon}) \quad \text{et} \quad \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1, \dots, i_m}(0) \frac{\partial^j}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} P_N(x) = 0$$

voir [B], pour une preuve de ce résultat.

Dans notre cas $L = \Delta + \lambda I$ et par la remarque 1.5, pour tout $p \in M$, la métrique exprimée dans les coordonnées normales au point p s'exprime comme la métrique canonique. On obtient un difféomorphisme \exp_p^{-1} vers un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine de façon à ce que, dans cette base, les termes d'ordre deux du Laplacien s'expriment comme le Laplacien de \mathbb{R}^n (section 1.2.4).

Ainsi, $\forall p \in N_f$, $\exists \delta > 0$ et $\forall x \in \mathcal{B}_\delta(0) \subset T_p M$, $f \circ \exp_p(x) = P_N(x) + O(|x|^{N+\epsilon})$, où P_N est un polynôme harmonique et homogène d'ordre N . Pour prouver le théorème qui nous intéresse (le suivant), Cheng démontre dans [Ch] que dans ces conditions, il existe un C^1 -difféomorphisme, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, laissant fixe l'origine et tel que $f \circ \exp_p(x) = P_N \circ \psi(x)$. C'est-à-dire que $\forall p \in N_f$, il existe $V \subset M$ un voisinage de p , tel que $V \cap N_f$ soit C^1 -difféomorphe à l'ensemble nodal de P_N . Étant donné qu'on connaît mieux ce qui se passe dans ce cas, on peut montrer le théorème suivant et ses corollaires par induction sur N . En fait, Cheng déclare le démontrer pour les variétés de dimension arbitraire dans [Ch]. Or, Colin de

Verdière a exhibé une faille dans la preuve de Cheng, pour les cas de dimension supérieure à 2, comme il est mentionné dans [C1].

Théorème 1.27 (S.Y. Cheng, 1976). *Soit (M, g) une variété lisse de dimension 2, si f, h sont lisses et satisfont $(\Delta + h(x))f = 0$, alors N_f est une sous-variété de dimension 1 sauf pour un ensemble fermé de points.*

Corollaire 1.28. *Si \overline{M} est compacte, de dimension 2 et que $f \in \mathcal{B}_\Gamma$:*

- (1) *les domaines nodaux sont des ouverts lisses avec un bord lisse par morceaux,*
- (2) *les lignes nodales qui se rencontrent forment des angles égaux,*
- (3) *les points critiques dans N_f sont en nombre fini,*
- (4) *si $\partial M = \emptyset$, N_f est un nombre fini de copies de S^1 , C^2 -immersées,*
- (5) *soit N_f rejoint les bords, soit N_f est fermé.*

La caractérisation des domaines nodaux des fonctions propres de variétés de dimension arbitraire a été étudiée par Bérard et Mayer pour le problème de Dirichlet et le problème fermé dans l'article [BM].

Théorème 1.29 (Courant). *Soit $\phi_k \in \mathcal{B}_\Gamma$, une fonction propre de $\lambda_k \in \text{Spec}(M, \Gamma)$, alors le nombre de domaines nodaux de ϕ_k est plus petit ou égal à k .*

Corollaire 1.30. *Les fonctions propres associées à λ_1 ont un signe constant et donc $E_{\lambda_1}(M, \Gamma)$ est de dimension 1. Toute fonction propre qui n'est pas dans cet espace a plus d'un domaine nodal. En particulier les fonctions de $E_{\lambda_2}(M, \Gamma)$ en ont exactement 2. De plus, la restriction d'une fonction propre à l'un de ses domaines nodaux en est la première fonction propre pour le problème associé.*

Corollaire 1.31. *L'espace propre $E_{\lambda_1}(M, \Gamma)$ étant de dimension 1 et fermé sous l'action du groupe $\text{Isom}(M, \Gamma)$, les fonctions de $E_{\lambda_1}(M, \Gamma)$ sont paires par rapport à l'action de $\text{Isom}(M, \Gamma)$ (i.e pour $\tau \in \text{Isom}(M, \Gamma)$ et $f \in E_{\lambda_1}(M, \Gamma)$, $f \circ \tau = f$).*

Chapitre 2

ÉTUDE DU PROBLÈME MIXTE SUR LE DISQUE PLAT

Le Laplacien apparaît dans plusieurs équations de la Physique comme l'équation de la chaleur et celle des ondes. À travers ces applications, les valeurs propres peuvent prendre différents sens physiques. C'est une des grandes motivations de l'étude des extrema des petites valeurs propres du Laplacien. En effet les petites valeurs propres ont souvent un rôle prédominant dans les applications physiques, puisqu'elles correspondent aux ondes de basse énergie. Par exemple, pour les domaines planaires de \mathbb{R}^2 , le disque minimise la première valeur propre du problème de Dirichlet sur l'ensemble des domaines planaires de même aire. Ceci signifie que le tambour rond sonne plus grave, qu'un tambour de même aire ayant une autre forme. D'un autre côté, pour les domaines planaires, la première valeur propre du problème de Dirichlet n'a pas de borne supérieure (rectangle). À l'inverse, la première valeur propre non-nulle du problème de Neumann, n'est pas bornée inférieurement (rectangle) mais est maximisée par le disque. Ainsi, en reprenant l'exemple du rectangle, il est trivial que la première valeur propre du Laplacien pour le problème mixte n'admet ni de borne inférieure ni de borne supérieure. En fait, pour le problème mixte, il est plus intéressant de trouver des extrema relativement à la partition du bord pour un domaine fixé. Le disque euclidien est un bon exemple parce que les partitions ne diffèrent que par leur disposition et non pas par leur géométrie.

Denzler a étudié la dépendance de $\lambda_1(\Gamma)$ vis-à-vis de la partition Γ , son volume étant fixé, dans le cas de domaines euclidiens Lipschitz. Il a obtenu un suprémum absolu pour $\lambda_1(\Gamma)$ lorsque Γ tend vers une distribution uniforme dans le bord du domaine [D1]. D'autre part, il a exhibé un minimum pour une boule euclidienne lorsque Γ est une calotte sphérique [D2]. À des fins de complétude, les démonstrations de ces résultats sont rapportées aux sections 2.1 et 2.2.

Les résultats de Denzler peuvent être partiellement étendus aux autres valeurs propres.

Théorème 2.1. *Soit Ω un domaine ouvert et borné, Lipschitz de dimension n . Pour tout $A \in]0, \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega)[$,*

$$\sup\{\lambda_n(\Gamma) \mid \Gamma \subset \partial\Omega, \text{Vol}(\Gamma) = A\} = \lambda_n(\partial\Omega)$$

Il existe une suite maximisante de parties du bord dont les fonctions caractéristiques convergent faiblement vers une constante dans $L^2(\partial\Omega)$.

À la section 2.2 on réduit le problème de minimisation de la deuxième valeur propre du disque pour les problèmes mixtes à une famille compacte décrite simplement par un paramètre. Plus précisément on montre que :

Proposition 2.2. *Pour tout $A \in]0, 2\pi[$, s'il existe un ensemble $\tilde{\Gamma} \subset \partial\mathbb{D}^2$ tel que $\lambda_2(\tilde{\Gamma}) = \min\{\lambda_2(\Gamma) \mid \text{Vol}_1(\Gamma) = A\}$ alors $\tilde{\Gamma}$ possède au plus deux composantes connexes. De plus, si $\tilde{\Gamma}$ possède deux composantes connexes alors elles sont d'égales longueurs.*

La détermination exacte du minimum est liée à une conjecture connue et fait l'objet de recherches actives reliées à la ligne nodale des deuxième fonctions propres du Laplacien pour le problème mixte.

Conjecture 2.3. *Soit Ω un domaine planaire (un ouvert borné dans \mathbb{R}^2), convexe. Alors, pour tout ouvert de son bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, et pour toute deuxième fonction propre $f \in E_{\lambda_2}(\Omega, \Gamma)$, la ligne nodale de f atteint le bord en deux points distincts (i.e $N_f \cap \partial\Omega = \{p, q\}$ avec $p \neq q$).*

Cette conjecture, dans le cas du problème de Dirichlet ($\Gamma = \partial\Omega$), a été proposée par Payne en 1967 dans [P] et prouvée par Mélas dans [Me] en 1992 pour les domaines ayant un bord lisse. Pour le problème de Neumann ($\Gamma = \emptyset$), c'est un corollaire du Principe de Monotonie et du fait que $\lambda_k(\text{Dir.}) \geq \lambda_{k+1}(\text{Neu.})$ pour les domaines planaires convexes [Po]. Il n'y a aucun autre résultat prouvant la Conjecture 2.3 pour les problèmes mixtes. Elle fait l'objet de recherches actuellement [Gr]. Évidemment, la Conjecture 2.3 est vérifiée pour les exemples dont on connaît les solutions explicites (certains problèmes simples sur les carrés, rectangles, triangles, secteurs de disque). De plus, cette proposition est cohérente avec les résultats classiques comme le Principe de Monotonie et semble naturelle étant donné l'ordre partiel entre les problèmes purs et mixtes. D'autre part, elle est appuyée par des tests numériques (voir section 2.4).

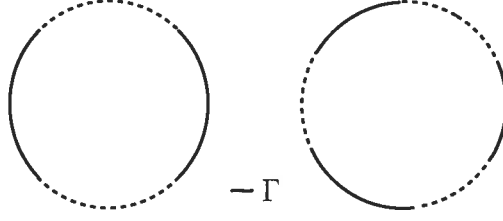
À la section 2.3, on reprend l'étude de la première valeur propre du disque $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ et on restreint notre étude au problème mixte déterminé par $\Gamma_D \subset \partial\mathbb{D}$ possédant au plus, un nombre fixé de composantes connexes et ayant une longueur fixée. On montre que

Théorème 2.4. *Pour $l \in [0, 2\pi]$, si Γ_D est la n -partition complètement symétrique de longueur l , alors $\lambda_1(\Gamma_D) = \max\{\lambda_1(\Gamma) \mid \Gamma \text{ } n\text{-partition, Vol}_1(\Gamma) = l\}$*

où l'on a défini pour le disque plat \mathbb{D} , que $\Gamma \subset \partial\mathbb{D}$ est une **n -partition** si elle est composée de n composantes connexes. Ceci implique que $\partial M = \Gamma \cup \Gamma^c$ est partagé en $2n$ parties, où sont imposées en alternance les conditions de Neumann et Dirichlet. On dit que $\Gamma \subset \partial\mathbb{D}$ est une **n -partition complètement symétrique** si c'est une n -partition telle que pour toutes deux composantes connexes de Γ , il existe une symétrie axiale de \mathbb{D} envoyant Γ sur elle-même et échangeant ces deux composantes, des exemples sont exposés ci-dessous.

Pour ce chapitre, la métrique euclidienne est imposée sur \mathbb{R}^n et la métrique euclidienne induite sur ses sous-variétés. Rappelons que pour Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n et une partie ouverte du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, le Théorème de Rayleigh

FIG. 2.1 Exemples de 2 et 3-partitions complètement symétriques



1.23 permet de définir $\lambda_1(\Gamma)$ comme le minimum du quotient de Rayleigh sur l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}(\Omega, \Gamma)$.

2.1. SUPREMUM

Le théorème suivant est une généralisation d'un Théorème dû à Denzler (apparu dans [D1]), concernant la première valeur propre du Laplacien sur un domaine borné et Lipschitz. La preuve ci-dessous est essentiellement la même que dans cet article sinon que l'auteur utilise le fait que la première fonction propre est de signe constant, ce qui indique qu'on ne peut généraliser cette preuve directement. Cela dit, nous verrons qu'il est possible de contourner ce problème en prenant la valeur absolue des fonctions propres lors de l'une des étapes. Pour les résultats classiques d'Analyse fonctionnelle qui sont utilisés dans la preuve suivante on peut consulter le livre de Brezis [Br], *Analyse fonctionnelle, théorie et application*.

Théorème 2.1. *Soit Ω un domaine ouvert, borné, Lipschitz, de dimension d . Pour tout $A \in]0, Vol_{n-1}(\partial\Omega)[$,*

$$\sup\{\lambda_n(\Gamma) \mid \Gamma \subset \partial\Omega, Vol(\Gamma) = A\} = \lambda_n(\partial\Omega).$$

Il existe une suite maximisante de parties du bord dont les fonctions caractéristiques convergent faiblement vers une constante dans $L^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. Construisons tout d'abord cette suite maximisante. Pour $k \in \mathbb{N}$, on partitionne $\partial\Omega$ en un nombre fini d'ouverts $S_i \subset \partial\Omega$, tels que le rapport des diamètres de chacun des S_i à $\partial\Omega$ soit au plus égal à $1/k$. Pour chacun des i , on choisit $T_i \subset S_i$ de façon à ce que $\text{Vol}(T_i)/\text{Vol}(S_i) = A/\text{Vol}(\partial\Omega)$. On pose $\Gamma_k := \cup_i T_i$, on a $\text{Vol}(\Gamma_k) = \sum_i \text{Vol}(T_i) = (\sum_i \text{Vol}(S_i)) \cdot A/\text{Vol}(\partial\Omega) = A$. En posant, $\chi_k := \chi_{\Gamma_k}$, la fonction caractéristique de Γ_k , on a pour $f \in C^0(\partial\Omega)$, $f\chi_k \in L^2(\partial\Omega)$ et $\int_{\partial\Omega} f\chi_k \rightarrow \int_{\partial\Omega} (A/\text{Vol}(\partial\Omega))f$, en approchant f par des fonctions étagées constantes sur les S_i , la continuité de f nous assurant du résultat. Par densité de $C^0(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, on peut refaire le raisonnement pour $f \in L^2(\partial\Omega)$ et obtenir la convergence faible de χ_k vers $A/\text{Vol}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Soit $\phi_{n,k}$ une fonction propre du Laplacien sur Ω associée à $\lambda_n(\Gamma_k)$. On peut prendre les $\phi_{n,k}$ de norme 1 dans $L^2(\Omega)$ et leur norme dans $H^{1,2}(\Omega)$ est bornée puisque leur carré vaut

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_{n,k}|^2 + 1 = \lambda_n(\Gamma_k) + 1 \leq \lambda_n(\partial\Omega) + 1$$

grâce à l'ordre partiel 1.24 entre les valeurs propres du problème mixte et de Dirichlet. L'inclusion compacte de $H^{1,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (Théorème de Rellich, [Br]) nous assure qu'il existe une sous-suite de $\phi_{n,k}$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction ϕ_n . La norme $H^{1,2}$ des fonctions $\phi_{n,k}$ est bornée et donc $\phi_n \in H^{1,2}(\Omega)$ ([Br]).

D'autre part, par compacité de l'application de restriction à la frontière (application trace) on peut considérer $\phi_{n,k}$ comme un élément de $L^2(\partial\Omega)$ (voir [Br]), et de plus, $\phi_{n,k}$ converge fortement vers ϕ_n dans cet espace. On a même la convergence forte de $|\phi_{n,k}|$ vers $|\phi_n|$ dans $L^2(\partial\Omega)$ car $(|\phi_{n,k}| - |\phi_n|)^2 \leq (\phi_{n,k} - \phi_n)^2$.

Pour tout k , la condition au bord peut s'écrire $(\chi_k \cdot |\phi_{n,k}|)|_{\partial\Omega} = 0$ et par passage à la limite $\int_{\partial\Omega} (A/\text{Vol}(\partial\Omega)) \cdot |\phi_n| = 0$. L'intégrande étant positive, $|\phi_n|$ s'annule sur $\partial\Omega$ et donc ϕ_n est une fonction test admissible pour le problème de Dirichlet sur Ω .

Finalement, $\lambda_n(\partial\Omega) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} R(\phi_{n,k}) = R(\phi_n) \geq \lambda_n(\partial\Omega)$ □

2.2. MINIMUM DE $\lambda_1(\Gamma)$ ET $\lambda_2(\Gamma)$

2.2.1. Symétrisations sphérique et cylindrique

La référence de base pour le type de symétrisation présentée dans cette section est le livre de Polya et Szegö, *Isoperimetrical Inequalities in Mathematical Physics* [PS]. Les auteurs offrent un point de vue géométrique plutôt qu'analytique. Ils utilisent en particulier la symétrisation de solides, qui sera appelée ici symétrisation cylindrique vu l'usage qui en sera fait, pour transformer le graphe d'une fonction. Habituellement, dans la littérature, le procédé utilisé pour obtenir le même type de transformation sur une fonction est plus analytique et s'applique à des situations plus générales. Étant donné le contexte des résultats qui suivent, le point de vue présenté par Polya et Szegö semble plus adéquat.

On note \mathbb{D}^n le disque de rayon 1 et de dimension n muni de la métrique euclidienne induite par le plongement de \mathbb{D}^n dans \mathbb{R}^n . On munit \mathbb{R}^n des coordonnées polaires usuelles (r, ξ) , avec $r \geq 0$ et $\xi \in S^{n-1}(1)$, où $S^{n-1}(1)$ est la sphère de dimension $n - 1$ et de rayon 1 de \mathbb{R}^n . On note $S^{n-1}(r) := \{(r, \xi) \mid \xi \in S^{n-1}(1)\}$, la sphère de dimension $n - 1$ de rayon $r > 0$.

Définition 2.5. On munit $S^{n-1}(r)$ de la métrique standard, g_{std} , induite par le plongement dans \mathbb{R}^n , une **calotte sphérique** centrée en (r, ξ_0) est une boule fermée $C := \{(r, \xi) \mid d_{g_{std}}((r, \xi_0), (r, \xi)) \leq \delta\}$ pour un δ donné.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Définition 2.6. Le symétrisé sphérique de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ par rapport à la demi-droite $\xi = \xi_0$, est noté $\Omega^*(\xi = 0)$ (ou simplement Ω^* si aucune confusion n'est possible) et est défini par les 2 propriétés suivantes:

- (1) $\forall r \geq 0, \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r) \cap \Omega^*) = \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r) \cap \Omega),$
- (2) $\forall r \geq 0, S^{n-1}(r) \cap \Omega^*$ est une calotte sphérique centrée en (r, ξ_0) .

Il est immédiat que Ω^* est symétrique par rapport à la droite $\{(r, \xi) \mid \xi = \xi_0 \text{ ou } \xi = -\xi_0\}$. De plus, par les propriétés de l'intégration, $\text{Vol}(\Omega^*) = \text{Vol}(\Omega)$.

Il est un peu moins immédiat que $\text{Aire}(\partial\Omega^*) \leq \text{Aire}(\partial\Omega)$ et que si Ω est lisse, alors Ω^* l'est aussi. La démonstration connue de ceci demande l'introduction d'une notation lourde. On peut consulter [PS].

Soit \mathbb{R}^{n+1} , muni de la métrique standard. On considère, trivialement, $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et on munit ce produit des coordonnées cylindriques (r, ξ, z) , avec $r > 0$, $\xi \in S^{n-1}(1)$ et $z \in \mathbb{R}$. On note $S^{n-1}(r, z) := \{(r, \xi, z) \mid \xi \in S^{n-1}(1)\}$.

Définition 2.7. *Le symétrisé cylindrique de $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par rapport au demi plan $\xi = \xi_0$, est noté $B^*(\xi = \xi_0)$ et est défini par les propriétés suivantes :*

- (1) $\forall r \geq 0$ et $\forall z \in \mathbb{R}$, $\text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r, z) \cap B^*) = \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r, z) \cap B)$,
- (2) $\forall r \geq 0$ et $\forall z \in \mathbb{R}$, $S^{n-1}(r, z) \cap B^*$ est une calotte sphérique centrée en (r, ξ_0, z) .

En fait, pour chaque réel z , $(S^{n-1}(r, z) \cap B^*) = (S^{n-1}(r, z) \cap B)^*$ (i.e pour chaque z , $(S^{n-1}(r, z) \cap B^*)$ est le symétrisé sphérique de $(S^{n-1}(r, z) \cap B)$ par rapport à la demi-droite $\{(r, \xi, z) \mid \xi = \xi_0\}$).

Encore une fois, il est immédiat que B^* est symétrique par rapport au plan $\{(r, \xi, z) \mid \xi = \xi_0 \text{ ou } \xi = -\xi_0\}$, que $\text{Vol}(B^*) = \text{Vol}(B)$ et que $\text{Aire}(\partial B^*) \leq \text{Aire}(\partial B)$. De plus, si B est lisse alors B^* l'est aussi.

2.2.2. Minimum pour $\lambda_1(\Gamma)$ sur le disque

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive définie sur Ω , notons

le graphe de f : $G_f := \{(x, f(x)) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega\}$,

et son graphe plein : $B_f := \{(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega, z \in [0, f(x)]\}$.

Théorème 2.8. *(Denzler, 1999) Soit \mathbb{D}^n le disque unitaire de dimension n dans \mathbb{R}^n , avec la métrique euclidienne et $A < \text{Vol}_{n-1}(\partial\mathbb{D}^n)$ alors pour $\Gamma_D \subset \partial\mathbb{D}^n$*

$$\lambda_1(\Gamma_D) = \min\{\lambda_1(\Gamma) \mid \Gamma \subset \partial\mathbb{D}^n \text{ et } \text{Vol}_{n-1}(\Gamma) = A\} \text{ si et seulement si}$$

Γ_D est une calotte sphérique (à un ensemble de mesure nulle près).

La démonstration complète se trouve dans [D2]. Nous ne démontrerons la réciproque et donnerons une idée de la preuve de la contraposée.

Démonstration. Soit $\Gamma \subset \partial\mathbb{D}^n$, et f la première fonction propre associée au problème mixte déterminé par Γ sur \mathbb{D}^n , par le Théorème de Courant on peut prendre cette fonction positive. Soit Γ_D une calotte sphérique de même volume que Γ , nous allons montrer dans un premier temps que $\lambda_1(\Gamma) \geq \lambda_1(\Gamma_D)$.

Le symétrisé cylindrique $(B_f)^*$ de B_f est un solide borné, inclus dans $\mathbb{D}^n \times \mathbb{R}$. Il existe une fonction f^* telle que $B_{f^*} = (B_f)^*$, parce qu'étant donné que f est une fonction, pour tout $r > 0$, $z_1 > z_2 \geq 0$,

$$\text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r, z_1) \cap B_f) \leq \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r, z_2) \cap B_f).$$

Ainsi, pour tout $r \in]0, 1[$ fixé, l'application $\xi \mapsto z(\xi) := \{(r, \xi, z) \mid z > 0\} \cap \partial(B_f)^*$ est bien définie et même (monotone) décroissante lorsque ξ s'éloigne de ξ_0 .

De plus, la fonction f^* est lisse au-dessus de \mathbb{D}^n parce que f est lisse. Par symétrisation, $f^*|_{\partial\mathbb{D}^n}$ s'annule sur une calotte sphérique Γ^* centrée sur $(1, -\xi_0, 0)$ de volume égal au volume de Γ . En effet, pour tout $z > 0$,

$$\text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}(r, z) \cap B_f) \leq \text{Vol}_{n-1}(\partial(\mathbb{D}^n \times 0)) - \text{Vol}_{n-1}(\Gamma).$$

Donc f^* est une fonction test pour le problème mixte déterminé par Γ^* . En particulier, $R(f^*) \geq \lambda_1(\Gamma^*)$. Il suffit maintenant de montrer que $R(f) \geq R(f^*)$.

En fait Denzler se sert plus précisément le lemme suivant, dont la première partie est dû à Sperner [Sp] et la deuxième est original.

Lemme 2.9. Soit une fonction positive $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^n) \cap C^0(\mathbb{D}^n)$ alors

$$1) \quad \int_{\mathbb{D}^n} |\nabla f|^2 \geq \int_{\mathbb{D}^n} |\nabla f^*|^2 \quad \text{ct} \quad \int_{\mathbb{D}^n} f^2 = \int_{\mathbb{D}^n} (f^*)^2$$

2) si, de plus, $f \in C^\infty(\mathbb{D}^n)$ alors l'égalité dans 1) implique que pour tout $r \in]0, 1[$, f et f^* coïncident à une rotation près sur $S^{n-1}(r)$

D'abord, on va montrer que $\int_{\mathbb{D}^n} f^2 = \int_{\mathbb{D}^n} (f^*)^2$. Il est clair que $\int_{\mathbb{D}^n} f = \text{Vol}(B_f) = \text{Vol}(B_{f^*}) = \int_{\mathbb{D}^n} f^*$. Il suffit donc de montrer que $B_{f^2}^* = B_{(f^*)^2}$, ce qui est évident dans la mesure où prendre la racine positive d'un nombre positif est un difféomorphisme.

Ensuite nous devons montrer que $\int_{\mathbb{D}^n} |\nabla f|^2 \geq \int_{\mathbb{D}^n} |\nabla f^*|^2$. Nous savons que

$$\begin{aligned} (\dagger) \quad \text{Aire}(B_f) &= \text{Vol}_n(\mathbb{D}) + \text{Vol}_n((S^{n-1}(1) \times \mathbb{R}) \cap B_f) + \text{Vol}_n(G_f) \\ &\geq \text{Aire}(B_{f^*}) = \text{Vol}_n(\mathbb{D}) + \text{Vol}_n((S^{n-1}(1) \times \mathbb{R}) \cap B_{f^*}) + \text{Vol}_n(G_{f^*}) \end{aligned}$$

Comme $\text{Vol}_n((S^{n-1}(1) \times \mathbb{R}) \cap B_f) = \text{Vol}_n((S^{n-1}(1) \times \mathbb{R}) \cap B_{f^*})$, on a $\text{Vol}_n(G_f) \geq \text{Vol}_n(G_{f^*})$. Or, le volume du graphe d'une fonction différentiable quelconque f au-dessus de $U \subset \mathbb{R}^n$ est donné par $\int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$. En effet, pour le graphe d'une fonction sur \mathbb{R}^2 , il suffit de remarquer que $|(1, \partial_x f, 0) \wedge (1, 0, \partial_y f)| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, où \wedge est le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 . Plus généralement, c'est un corollaire des formules de l'Aire qu'on peut retrouver par exemple dans [EG].

De plus, puisque pour tout $\varepsilon > 0$, $\text{Vol}_2(G_{\varepsilon f}) \geq \text{Vol}_2(G_{\varepsilon f^*})$, on a

$$\int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f|^2} \geq \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f^*|^2}.$$

Alors, en prenant le développement limité (point par point), on obtient que

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla f|^2 \geq \int_{\mathbb{D}} |\nabla f^*|^2.$$

On conclut la preuve du Lemme 2.9 1) en utilisant le Théorème de Rayleigh 1.23. La preuve de la partie 2 du Lemme 2.9 nécessite des outils plus puissants que nous n'introduirons pas en détails ici, nous donnons les grandes lignes de la preuve. Pour f une fonction lisse sur le disque et $r \in]0, 1[$, on peut exprimer $|\nabla f|^2|_{S^{n-1}(r)} = (\partial_r f)^2 + |\nabla^{S_r} f|^2$, où $\nabla^{S_r} f$ est le gradient de $f|_{S^{n-1}(r)}$. Par symétrisation, il est clair que pour tout r

$$\int_{S^{n-1}(r)} |\nabla^{S_r} f|^2 \geq \int_{S^{n-1}(r)} |\nabla^{S_r} f^*|^2. \quad (2.2.1)$$

Aussi on peut montrer

$$\int_{S^{n-1}(r)} (\partial_r f)^2 \geq \int_{S^{n-1}(r)} (\partial_r f^*)^2 \quad (2.2.2)$$

en utilisant la définition de dérivée et que $\int u^* \cdot v^* \geq \int u \cdot v$ pour $u, v \geq 0$. Cette dernière inégalité est évidente pour les fonctions étagées et, suivant la définition de l'intégrale de Lebesgue, s'applique au fonction continue. Ainsi l'égalité dans le Lemme 2.9 implique l'égalité presque partout sur $]0,1[$ des inégalités 2.2.1 et 2.2.2 et par régularité l'égalité est vrai partout. En utilisant les formules de l'Aire on peut montrer Denzler montre que les dernières égalités impliquent que pour presque tout $z > 0$, $\text{Vol}_{n-2}(\partial(f^*|_{S^{n-1}(r)})^{-1}([z, \infty[)) = \text{Vol}_{n-2}(\partial(f|_{S^{n-1}(r)})^{-1}([z, \infty[))$ et par régularité pour tout z . Il résulte de l'inégalité isopérimétrique (sur les sphères, a volume égale le bord le plus petit d'un domaine lisse est donnée par la calotte sphérique uniquement, [C2]) et du fait que la symétrisation préserve l'air, que $(f|_{S^{n-1}(r)})^{-1}([z, \infty[)$ doit être une calotte sphérique. Ceci termine la preuve du Lemme 2.9.

Pour conclure la preuve du Théorème 2.8 Denzler utilise le Lemme 2.9 afin de conclure que sur chacune des sphères $S^{n-1}(r)$, la restriction de la première fonction propre, f_r , est monotone décroissante en fonction de la distance à un certain $x_r \in S^{n-1}(r)$. Par compacité de l'application trace et les attributs des fonctions monotones, théorème d'Helly qui assure la convergence, pour presque partout d'une sous-suite f_r vers une fonction monotone f_1 , Denzler termine la preuve de son théorème. \square

2.2.3. Minimum de $\lambda_2(\Gamma)$ sur le disque plat

La symétrisation décrite dans la section 2.2.1 est un outil puissant qui a été utilisé, entre autres, pour démontrer que le disque réalisait le minimum de la première fonction propre du problème de Dirichlet sur la famille des domaines bornés de \mathbb{R}^n . Dans le cas où l'on s'intéresse au problème mixte, ce sont les conditions au bord que l'on veut faire varier plutôt que le domaine et ceci tout en respectant

le volume de la partie Dirichlet choisie avant la symétrisation. Or, s'il y a peu de domaines qui restent inchangés par la symétrisation sphérique, il y en a encore moins dont les conditions au bord seront transformées de façon non-triviale. Ainsi, le disque, de dimension arbitraire, est l'un des seuls domaines où la symétrisation sphérique est intéressante (on ne parle pas ici des autres types de symétrisation). La propriété du disque qui est nécessaire est que le mode de symétrisation (sphère) envoie le bord du disque sur lui-même (i.e $((\partial\mathbb{D}^n) \times \mathbb{R})^* = (\partial\mathbb{D}^n)^* \times \mathbb{R}$). Sinon, on ne peut annuler l'aire latérale dans (\ddagger) . Pour un domaine quelconque Ω et f une fonction positive s'annulant sur $\Gamma \subset \partial\Omega$, l'aire latérale du graphe plein est nulle au-dessus de la partie Γ (i.e $\text{Vol}_n(\Gamma \times \mathbb{R} \cap B_f) = 0$). Il suffit donc, pour appliquer une symétrisation intéressante sur une fonction positive, que le mode de symétrisation n'intersecte pas transversalement la partie Neumann du bord. En particulier, on peut symétriser chacun des domaines nodaux d'une deuxième fonction propre sur le disque plat pour tenter d'obtenir un minimum pour la deuxième valeur propre. Plus précisément, on peut démontrer la Proposition 2.2 que nous rappelons ici :

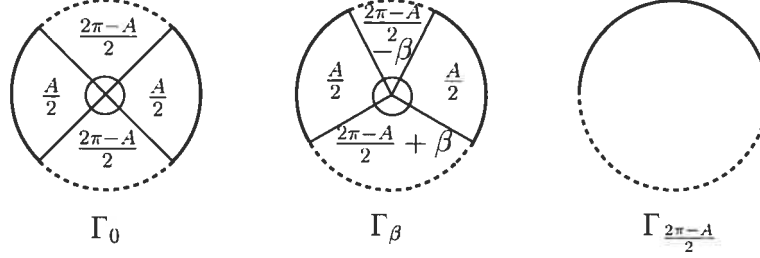
(Proposition 2.2) *Soient $A \in]0, 2\pi[$ et $\tilde{\Gamma} \subset \partial\mathbb{D}^2$ avec $\text{Vol}(\tilde{\Gamma}) = A$ tel que $\lambda_2(\tilde{\Gamma}) = \min\{\lambda_2(\Gamma) \mid \text{Vol}_1(\Gamma) = A\}$ alors, à un ensemble de mesure nulle près, $\tilde{\Gamma}$ possède au plus deux composantes connexes. De plus, si $\tilde{\Gamma}$ possède deux composantes connexes alors elles sont d'égales longueurs.*

Pour le reste de cette section fixons un $A \in]0, 2\pi[$ et ne considérons que les parties Dirichlet de longueur A . Pour $\beta \in [0, \frac{2\pi-A}{2}]$, notons $\Gamma_\beta \subset \partial\mathbb{D}^2$ la partie décrite par la Figure 2.2.

La Proposition 2.2 est en fait un corollaire du lemme suivant.

Lemme 2.10. *Pour $\Gamma \subset \mathbb{D}^2$, $\Gamma_N = \partial\mathbb{D}^2 \setminus \bar{\Gamma}$, et $f \in E_{\lambda_2}(\mathbb{D}^2, \Gamma)$, notons $D_+ := \{p \in \mathbb{D}^2 \mid f(p) > 0\}$ et $D_- := \{p \in \mathbb{D}^2 \mid f(p) < 0\}$ ses deux domaines nodaux et définissons $\beta(f) := \max \left\{ |\Gamma_N \cap \partial D_+| - \frac{(2\pi-A)}{2}, |\Gamma_N \cap \partial D_-| - \frac{(2\pi-A)}{2} \right\}$. Alors $\lambda_2(\Gamma) \geq \lambda_2(\Gamma_{\beta(f)})$, avec égalité si et seulement si $\Gamma = \Gamma_{\beta(f)}$ à un ensemble de mesure nulle près.*

FIG. 2.2 Famille de partitions du bord, $\{\Gamma_\beta\}$, paramétrisée par $\beta \in [0, \frac{2\pi-A}{2}]$ et contenant le minimum de la deuxième valeur propre.



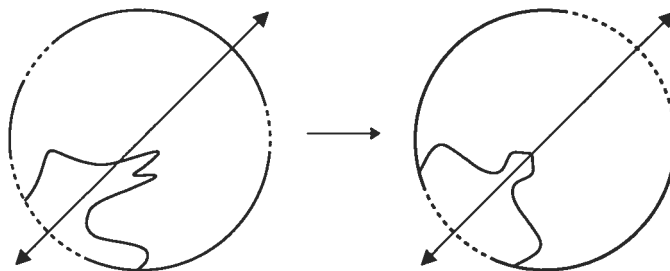
Démonstration. (du Lemme 2.10) Grâce aux Corollaires 1.28 et 1.30, on sait que la deuxième valeur propre est associée à des fonctions propres possédant exactement deux domaines nodaux. Il y a deux cas possibles pour la ligne nodale :
(i) elle est sans auto-intersection et rejoint les bords,
(ii) elle est fermée et l'un des domaines nodaux a un bord inclus dans le disque.
L'éventualité que la ligne nodale rejoigne le bord en un seul point est considérée dans la cas *(i)*.

Supposons d'abord que le cas *(i)* se réalise pour le problème mixte sur \mathbb{D}^2 déterminé par $\Gamma \subset \partial\mathbb{D}^2$. Fixons $f \in E_{\lambda_2}(\mathbb{D}^2, \Gamma)$ et reprenons les notations introduites dans le Lemme 2.10. Supposons, sans perte de généralité, que $\beta(f) = |\Gamma_N \cap \partial D_+| - \frac{(2\pi-A)}{2}$ et définissons

$$f_+ := \begin{cases} f(p) & p \in D_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_- := \begin{cases} -f(p) & p \in D_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f_+ est la première fonction propre sur D_+ satisfaisant à la condition de Dirichlet sur $(\partial D_+ \cap \mathbb{D}^2) \cup (\partial D_+ \cap \Gamma)$ et de même, f_- est la première fonction propre sur D_- vérifiant la condition de Dirichlet sur $(\partial D_- \cap \mathbb{D}^2) \cup (\partial D_- \cap \Gamma)$. En particulier, ces deux domaines ont la même première valeur propre égale à $\lambda_2(\Gamma)$.

FIG. 2.3 Exemple du produit d'une symétrisation



On veut maintenant appliquer une symétrisation à chacun des domaines nodaux de façon à obtenir la famille de partitions demandée. Nous allons procéder sur un domaine nodal à la fois. Prenons d'abord $B_{f_+}^*$, le symétrisé cylindrique du graphe plein de f_+ , par rapport au demi-plan de \mathbb{R}^3 déterminé par $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Cette symétrisation cylindrique induit sur D_+ une symétrisation sphérique par rapport à la demi-droite déterminée par e_1 , c'est-à-dire $(D_+)^* = B_{f_+}^* \cap \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. Le domaine $(D_+)^*$ vérifie les propriétés d'un symétrisé, en particulier, il est symétrique par rapport à la droite déterminée par e_1 . Remarquons, par ailleurs, que dans ce cas particulier, $(D_+)^* \subset \mathbb{D}^2$ et $\text{Vol}_1(\partial(D_+)^* \cap S^1) = \text{Vol}_1(\partial D_+ \cap S^1)^*$.

De plus, comme dans la preuve précédente, il existe une fonction positive $f_+^* : (D_+)^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $B_{f_+^*} = B_{f_+}^*$. La fonction f_+^* s'annule sur $(\partial D_+^*) \cap \mathbb{D}^2$ par les propriétés de la symétrisation et la continuité de f à l'intérieur de \mathbb{D}^2 . La seule partie de ∂D_+^* où f_+^* ne s'annule pas est un ensemble connexe centré en e_1 de volume égal à $\text{Vol}(\Gamma_N \cap \partial D_+) = \frac{(2\pi - A)}{2} + \beta(f)$ (voir figure 2.3). Notons l'union des parties où f_+^* s'annule $\Gamma_+ := (\partial D_+^*) \cap \mathbb{D}^2 \cup (\partial D_+^* \cap \partial \mathbb{D}^2 \setminus (\Gamma_N \cap \partial D_+)^*)$.

Comme dans la preuve précédente, on montre que

$$\int_{D_+} f_+^2 = \int_{D_+^*} (f_+^*)^2 \quad \text{et} \quad \int_{D_+} |\nabla f_+|^2 \geq \int_{D_+^*} |\nabla (f_+^*)|^2.$$

Donc, par le théorème de Rayleigh,

$$\lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma) = \frac{\int_{D_+} |\nabla f_+|^2}{\int_{D_+} f_+^2} \geq \frac{\int_{D_+} |\nabla f_+^*|^2}{\int_{D_+} (f_+^*)^2} \geq \lambda_1(D_+^*, \Gamma_+).$$

On peut refaire le même raisonnement avec f_- , en symétrisant par rapport à $-e_1$. On obtient un domaine D_-^* complémentaire à $\overline{D_+^*}$ dans \mathbb{D}^2 . En particulier, il est tel que pour tout $r > 0$, $(S^1(r) \cap D_-^*) \cup (S^1(r) \cap \overline{D_+^*})$. De plus, comme précédemment, la seule partie de ∂D_-^* où f_-^* ne s'annule possiblement pas est un ensemble connexe centré en $-e_1$, dont le volume vaut nécessairement $\text{Vol}(\Gamma_N \cap \partial D_-) = \frac{(2\pi-A)}{2} - \beta(f)$ (voir figure 2.3).

En adaptant la notation ci-dessus au cas f_- , on démontre que

$$\int_{D_-} f_-^2 = \int_{D_-^*} (f_-^*)^2 \quad \text{et} \quad \int_{D_-} |\nabla f_-|^2 \geq \int_{D_-^*} |\nabla (f_-^*)|^2.$$

Donc, par le théorème de Rayleigh,

$$\lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma) = \frac{\int_{D_-} |\nabla f_-|^2}{\int_{D_-} f_-^2} \geq \frac{\int_{D_-} |\nabla f_-^*|^2}{\int_{D_-} (f_-^*)^2} \geq \lambda_1(D_-^*, \Gamma_-).$$

Remarquons que $\Gamma_{\beta(f)} = (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \cap \partial \mathbb{D}^2$. Par le Principe de Monotonie et les inégalités obtenues précédemment par symétrisation,

$$\lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma_{\beta(f)}) \leq \max\{\lambda_1(D_+^*, \Gamma_+), \lambda_1(D_-^*, \Gamma_-)\} \quad (2.2.3)$$

$$\leq \max\left\{\frac{\int_{D_+^*} |\nabla f_+^*|^2}{\int_{D_+^*} (f_+^*)^2}, \frac{\int_{D_-^*} |\nabla f_-^*|^2}{\int_{D_-^*} (f_-^*)^2}\right\} \leq \lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma) \quad (2.2.4)$$

Supposons à présent que le cas (ii) se réalise pour le problème mixte sur \mathbb{D}^2 déterminé par $\Gamma \subset \partial \mathbb{D}^2$. Encore une fois, on peut refaire une symétrisation sphérique de chacun des domaines nodaux par rapport à deux vecteurs opposés de \mathbb{R}^2 . La preuve est la même que pour le cas (i) mais la partition obtenue est nécessairement connexe (voir figure 2.3).

Le cas de l'égalité reste maintenant à démontrer.

En fait, notons d'abord que l'égalité dans le Lemme 2.10 implique que le maximum dans l'inégalité 2.2.4 est atteint par les deux quotients. En effet, supposons, par l'absurde, que $\lambda_1(D_-^*, \Gamma_-) < \lambda_1(D_+^*, \Gamma_+) = \lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma_{\beta(f)})$. Par continuité de la première valeur propre en fonction du domaine il existe un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{D}^2$, satisfaisant $D_+ \subset \mathcal{D}$ et $\mathbb{D}^2 \setminus \mathcal{D} \subset D_-$ tel que par le Principe de Monotonie, en notant $\Gamma_{\beta(f), N} := \partial \mathbb{D}^2 \setminus \Gamma_{\beta(f)}$,

$$\lambda_1(D_-^*, \Gamma_-) \leq \lambda_1(\mathbb{D}^2 \setminus \mathcal{D}, \partial(\mathbb{D}^2 \setminus \mathcal{D}) \setminus \Gamma_{\beta(f), N}) = \lambda_1(\mathcal{D}, \partial \mathcal{D} \setminus \Gamma_{\beta(f), N}) < \lambda_1(D_+^*, \Gamma_+)$$

On obtient donc $\lambda_2(\mathbb{D}^2, \Gamma_{\beta(f)}) \leq \lambda_1(\mathcal{D}, \Gamma_{\beta(f)} \cap \partial \mathcal{D}) < \lambda_1(D_+^*, \Gamma_+) = \lambda_2(\Gamma_{\beta(u)})$.

Ainsi l'égalité dans le Lemme 2.10 implique les deux égalités suivantes.

$$\frac{\int_{D_+} |\nabla f_+|^2}{\int_{D_+} f_+^2} = \frac{\int_{D_+} |\nabla f_+^*|^2}{\int_{D_+} (f_+^*)^2} \quad \text{ct} \quad \frac{\int_{D_-} |\nabla f_-|^2}{\int_{D_-} (f_-)^2} = \frac{\int_{D_-} |\nabla f_-^*|^2}{\int_{D_-} (f_-^*)^2}$$

L'idée maintenant est d'appliquer la deuxième partie du Lemme 2.9 qui devrait, à priori, ne s'appliquer qu'aux fonctions lisses. Dans notre cas, étant donné que c'est deux fonctions positives lisse sur leur support (i.e $D_+ = \{p \in \mathbb{D} \mid f_+(p) > 0\}$ et $D_- = \{p \in \mathbb{D} \mid f_-(p) > 0\}$), en vérifiant soigneusement les étapes de la preuve impliquant l'égalité on trouve que de telles fonctions satisfont aussi ce Lemme. \square

Remarque 2.11. Posons $A = \pi$ et considérons la famille $\{\Gamma_\beta \mid \Gamma_\beta \subset \partial \mathbb{D}\}$ paramétrée par β dans l'intervalle compact $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme illustré par la figure 2.2. Supposons qu'il existe une partition Γ_{β_0} , qui minimise la deuxième valeur propre sur cette famille (i.e $\lambda_2(\Gamma_{\beta_0}) = \min\{\lambda_2(\Gamma_\beta) \mid \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$). Nous venons de démontrer que pour tout $\Gamma \subset \partial \mathbb{D}$, il existe $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\lambda_2(\Gamma_\beta) \leq \lambda_2(\Gamma)$. Donc, par transitivité des inégalités $\lambda_2(\Gamma_{\beta_0}) \leq \lambda_2(\Gamma_\beta) \leq \lambda_2(\Gamma)$ et $\lambda_2(\Gamma_{\beta_0})$ est le minimum global (sur l'ensemble des partitions) et est atteint par Γ_{β_0} . Ainsi pour montrer l'existence d'une partition minimisante pour la deuxième valeur propre il suffit de le montrer sur la famille $\{\Gamma_\beta\}_{\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$. En particulier si l'application $\beta \mapsto \lambda_2(\Gamma_\beta)$ est continue, par compacité de l'intervalle de définition, l'existence découlera de la dernière preuve.

2.3. MAXIMISATION DE $\lambda_1(\mathbb{D})$, SUR CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS

Dans cette section, on considère à nouveau le problème avec conditions mixtes au bord sur \mathbb{D} , le disque de \mathbb{R}^2 . Pour simplifier les notations, la partie du bord correspondant à la condition de Dirichlet (respectivement Neumann) sera notée Γ_D (respectivement Γ_N).

À la section 2.3.1, on montre que $\lambda_1(\Gamma_D)$ atteint un maximum sur l'ensemble des partitions (de longueur fixée) possédant deux composantes connexes (ou moins) lorsque Γ_D est la 2-partition complètement symétrique. À la sous-section 2.3.2, on discute la généralisation naturelle à n composantes.

On commence par traiter le cas où $\text{Vol}(\Gamma_D) = \text{Vol}(\Gamma_N) = \pi$.

On travaille avec les coordonnées polaires usuelles (θ, r) représentant le point $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, pour $\theta \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

2.3.1. Le cas à deux composantes

On peut paramétriser l'ensemble des 2-partitions avec deux paramètres. En effet, soient $a, b \in [0, \pi]$, on définit $V_{ab} := \mathcal{H}(\mathbb{D}, \Gamma_{ab})$ où

$$\Gamma_{ab} := \{(\theta, 1) \mid \theta \in [0, a] \cup [b, b + \pi - a]\}$$

est une 2-partition (voir figure 2.4).

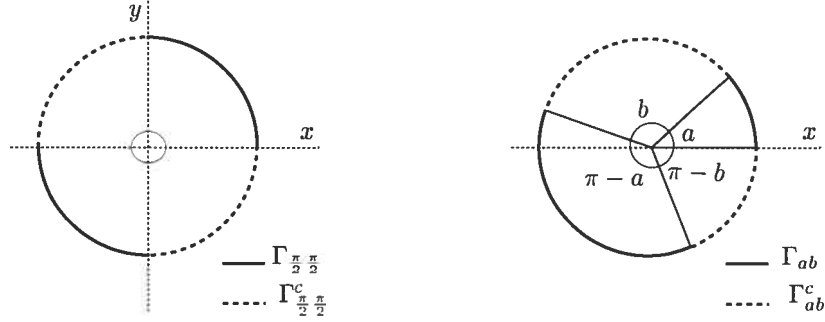
En particulier, $\Gamma_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} = \{(\theta, 1) \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]\}$ est la 2-partition complètement symétrique.

Soit λ_{ab} : la première valeur propre du Laplacien associée à V_{ab} .

Par le Théorème de Rayleigh, on sait que $\lambda_{ab} = \min \{R[f] \mid f \in V_{ab}\}$ avec égalité si et seulement si f est une fonction propre du Laplacien associée à λ_{ab} .

Pour $b = 0$, $b = \pi$, $a = 0$ ou $a = \pi$, Γ_{ab} a une seule composante connexe et λ_{ab} est minimale par le Théorème 2.8.

FIG. 2.4 La 2-partition complètement symétrique et une 2-partition quelconque



Proposition 2.12. $\forall a, b \in [0, \pi], \quad \lambda_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} \geq \lambda_{ab}.$

Soit $f \in V_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$, la première fonction propre du Laplacien, i.e vérifiant $\Delta f + \lambda_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} f = 0$, que l'on choisit de signe positif et de norme 1, ce qui est permis par le Théorème de Courant (1.29). C'est une fonction lisse à l'intérieur de \mathbb{D} et c'est une fonction de $\mathcal{H}(\mathbb{D}, \Gamma_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}})$.

L'idée de la preuve est de construire une fonction $f^* \in V_{ab}$ à partir de f telle que $R[f^*] = R[f]$, par Rayleigh on sait alors que $\lambda_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} \geq \lambda_{ab}$.

Afin de clarifier la démonstration qui suit, on va d'abord démontrer le lemme suivant:

Lemme 2.13.

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, admissible, satisfaisant des conditions mixtes données au bord. S'il existe $(\xi_1, \xi_2, \gamma) \in [-\pi, \pi]^3$ tel que $\forall \alpha \in [-\gamma, \gamma]$ on ait:

$$f(\xi_1 + \alpha, r) = f(\xi_1 - \alpha, r) = f(\xi_2 - \alpha, r) = f(\xi_2 + \alpha, r) \quad (\dagger)$$

(i.e f est (partiellement) paire par rapport aux axes passant par ξ_1 et ξ_2 et il y a une rotation envoyant ξ_1 sur ξ_2)

alors

$$f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}(\theta, r) := \begin{cases} f(\theta + \alpha, r) & \theta \in [\xi_1, \xi_2] \\ f(\theta - \alpha, r) & \theta \in [\xi_2, \xi_1] \end{cases}$$

est admissible et satisfait

$$\frac{D[f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}, f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}]}{\|f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}\|^2} = \frac{D[f, f]}{\|f\|^2} \quad \forall \alpha \in [-\gamma, \gamma]$$

Démonstration. (Lemme 2.13) Soit $\alpha \in [-\gamma, \gamma]$. Les conditions sur f et la condition (\dagger) , nous assurent que $f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}$ est admissible par morceaux et continue, donc admissible. On a

$$\begin{aligned} D[f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}, f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}] &= \int_0^1 \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\text{Grad} f(\theta + \alpha, r)|^2 + \int_0^1 \int_{\xi_2}^{\xi_1} |\text{Grad} f(\theta - \alpha, r)|^2 \\ &= \int_0^1 \int_{\xi_1 + \alpha}^{\xi_2 + \alpha} |\text{Grad} f(\theta, r)|^2 + \int_0^1 \int_{\xi_2 - \alpha}^{\xi_1 - \alpha} |\text{Grad} f(\theta, r)|^2 \\ &= D[f, f] + \int_0^1 \int_{\xi_2 - \alpha}^{\xi_2 + \alpha} |\text{Grad} f(\theta, r)|^2 - \int_0^1 \int_{\xi_1 - \alpha}^{\xi_1 + \alpha} |\text{Grad} f(\theta, r)|^2 = D[f, f] \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $\|f_{\xi_1, \xi_2, \alpha}\|^2 = \|f\|^2$. □

Démonstration. (Proposition 2.12)

On remarque que $\Gamma_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$ est symétrique par rapport à l'axe $\{(\frac{\pi}{4}, r) \cup (\frac{5\pi}{4}, r), r \in [0, 1]\}$ et à l'axe $\{(\frac{3\pi}{4}, r) \cup (\frac{7\pi}{4}, r) \mid r \in [0, 1]\}$. Posons $\xi = \frac{\pi}{4}$ et $\eta = \frac{3\pi}{4}$. Par le Corollaire 1.31, on sait que la première fonction propre du Laplacien, f , est paire par rapport aux isométries de \mathbb{D} préservant les conditions au bord. Notamment, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$f(\xi + \theta, r) = f(\xi - \theta, r) = f(\xi + \pi - \theta, r) = f(\xi + \pi + \theta, r) \quad (*)$$

On obtient les mêmes relations pour η . Donc, f satisfait le Lemme 2.13, d'une part avec (ξ, ξ_π, π) et d'autre part avec $(\eta, \eta + \pi, \pi)$

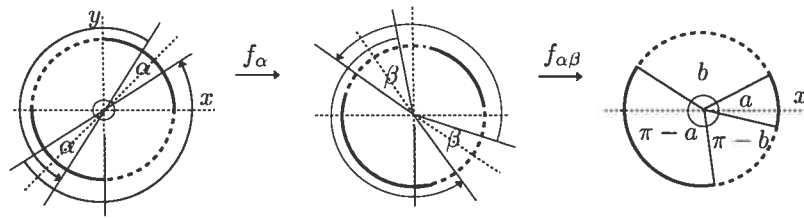
Soient $0 \leq a, b \leq \pi$, posons $\alpha = (\frac{\pi}{2} - a)$ et $\beta = (\frac{\pi}{2} - b)$. On va faire la construction par étapes. On prend tout d'abord $f_{\xi, \xi + \pi, \frac{\alpha}{2}}$.

Pour cela, on enlève un secteur d'angle α d'une composante de f ($\Gamma_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$), de façon à obtenir un secteur d'angle égal au minimum de a et $\pi - a$ et on l'ajoute à l'autre composante de façon à obtenir un secteur d'angle égal au maximum entre a et $\pi - a$.

On veut ensuite effectuer un traitement similaire aux secteurs de f ($\Gamma_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}^c$) qui sont maintenant déplacés par rapport au repère initial. Aussi, étant donné que $-\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{\pi}{4}$, on sait que f n'a été perturbée au maximum que sur la moitié de sa surface. Ceci nous assure que $f_{\xi, \xi + \pi, \frac{\alpha}{2}}$ satisfait le Lemme 2.13 pour $(\eta - \frac{\alpha}{2}, \eta + \pi + \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{4})$.

La fonction que l'on considère finalement est : $f^*(\theta, r) = (f_{\xi, \xi + \pi, \frac{\alpha}{2}})_{\eta - \frac{\alpha}{2}, \eta + \pi + \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}(\theta, r)$

FIG. 2.5 Construction de f^*



Par le Lemme 2.13, on a que $R[f^*] = R[f]$ □

Remarque 2.14. On peut exprimer explicitement f^* en fonction de f :

$$f^*(\theta, r) = \begin{cases} f_0(\theta, r) := f(\theta + \alpha/2 - \beta/2, r) & \theta \in [\xi + \beta/2, \eta - \alpha/2], \\ f_1(\theta, r) := f(\theta + \alpha/2 + \beta/2, r) & \theta \in [\eta - \alpha/2, \xi + \pi - \beta/2], \\ f_2(\theta, r) := f(\theta - \alpha/2 + \beta/2, r) & \theta \in [\xi + \pi - \beta/2, \eta + \pi + \alpha/2], \\ f_3(\theta, r) := f(\theta - \alpha/2 - \beta/2, r) & \theta \in [\eta + \pi + \alpha/2, \xi + \beta/2]. \end{cases}$$

Le cas où $\text{Vol}(\Gamma_D) \neq \text{Vol}(\Gamma_N)$. Posons $l_D = \text{Vol}(\Gamma_D)$ et $l_N = \text{Vol}(\Gamma_N) = 2\pi - l_D$. On veut montrer qu'en fixant l_D , on atteint un maximum pour λ_1 sur l'ensemble des partitions de Γ_D en deux composantes connexes, lorsque la configuration est symétrique par rapport à deux diamètres perpendiculaires. On peut paramétriser cette partition par $\Gamma_D = \{(\theta, 1) | \theta \in [0, \frac{l_D}{2}] \cup [\pi, \pi + \frac{l_D}{2}]\}$ et $\Gamma_N = \partial\mathbb{D} \setminus \bar{\Gamma}_D$.

Soit $\lambda_{\frac{l_D}{2} \frac{l_N}{2}}$ la première valeur propre du Laplacien associée à cette partition.

Soit $a \in [0, l_D]$ et $b \in [0, l_N]$, on définit comme précédemment la partition associée à a et b et on a λ_{ab} la première valeur propre associée. On veut montrer que $\lambda_{\frac{l_D}{2} \frac{l_N}{2}} \geq \lambda_{ab}$.

On pose $\alpha := \frac{l_D}{2} - a$ et $\beta := \frac{l_N}{2} - b$. On peut ensuite suivre pas à pas la preuve précédente.

2.3.2. Le cas général

Considérons le cas où Γ_D possède au plus n composantes connexes. On peut montrer par le même argument que la n -partition complètement symétrique maximise la première valeur propre du Laplacien, pour $\text{Vol}(\Gamma_D)$ fixée. Dans le cas d'une n -partition complètement symétrique, la longueur d'arc d'une section Dirichlet est $\frac{\text{vol}(\Gamma_D)}{n}$ et celle d'une section Neumann est $\frac{\text{vol}(\Gamma_N)}{n}$.

Notations

Posons de nouveau $\text{Vol}(\Gamma_D) = l_D$, et $\text{Vol}(\Gamma_N) = l_N$. Soient $a_i \in [0, l_D]$, $b_i \in [0, l_N]$, pour $i = 1 \dots n$, tels que $\sum_{i=1}^n a_i = l_D$ et $\sum_{i=1}^n b_i = l_N$, on note une n -partition

associée,

$$\Gamma_{a_1 b_1 \dots a_n b_n} := \{(\theta, 1) \mid \theta \in [0, a_1] \cup [a_1 + b_1, a_1 + b_1 + a_2] \dots \\ \dots \cup \left[\sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i), \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i) + a_n \right] \}$$

Soit $V_{a_1 b_1 \dots a_n b_n} := \mathcal{H}(\mathbb{D}, \Gamma_{a_1 b_1 \dots a_n b_n})$.

La partition complètement symétrique est celle où $a_i = \frac{l_D}{n}$ et $b_i = \frac{l_N}{n}$ pour $i = 1, \dots, n$. Il existe alors n axes de réflexions préservant les conditions au bord, chacun d'eux passant par 0 et par le centre de deux des composantes de Γ_D et/ou Γ_N , dépendamment de la parité de n . Notons

$$\xi_i = \frac{l_D}{2n} + (i-1) \left(\frac{l_D}{n} + \frac{l_N}{n} \right) \quad \text{et} \quad \eta_i = \frac{l_N}{2n} + i \frac{l_D}{n} + (i-1) \frac{l_N}{n} \quad \text{pour} \quad i = 1 \dots n.$$

Ce sont les angles qui forment les axes de symétrie. De plus, pour tout couple (ξ_i, ξ_j) il y a une rotation R_{ij} , préservant la partition, telle que $R_{ij}((\xi_i, r)) = (\xi_j, r)$. Il en est de même, pour tous les couples (η_i, η_j) .

Méthode de construction

Soit $f \in V_{\frac{l_D}{n} \frac{l_N}{n} \dots \frac{l_D}{n} \frac{l_N}{n}}$, une fonction propre de la première valeur propre associée. On sait que f est paire par rapport à toute symétrie préservant les conditions au bord. Dans notre cas, on obtient les relations suivantes: $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$,

$$f(\xi_i + \theta, r) = f(\xi_i - \theta, r) = f(\xi_j - \theta, r) = f(\xi_j + \theta, r). \quad (*)$$

Ceci revient à dire que f satisfait la condition du Lemme 2.13 pour tout triplet (ξ_i, ξ_j, π) et tout triplet (η_i, η_j, π) avec $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On construit une fonction de $V_{a_1 b_1 \dots a_n b_n}$ qui a le même quotient de Rayleigh que f . Posons $\alpha_i = (\frac{l_D}{n} - a_i)$ et $\beta_i = (\frac{l_N}{n} - b_i)$ pour $i = 1 \dots n$. On a que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$. L'idée de la construction est la même que dans la construction précédente, si α_i est positif, on veut « réduire » les secteurs centrés en $f(\xi_i)$, en ôtant un secteur central d'angle α_i ou « augmenter » les secteurs correspondant

à des α_i négatifs de façon à obtenir une fonction f^* de $V_{a_1 \frac{l_D}{n} \dots a_n \frac{l_D}{n}}$. Puis, on veut appliquer une procédure similaire aux secteurs Neumann de f^* pour obtenir une fonction f^{**} de $V_{a_1 b_1 \dots a_n b_n}$. Certaines complications peuvent survenir. Par exemple on va devoir augmenter successivement plusieurs fois le même secteur. Afin de ne pas s'embarrasser des changements de repères, on traite chaque secteur du disque séparément. De fait, notons $S_i \subset \mathbb{R}^3$ (respectivement $T_i \subset \mathbb{R}^3$) le graphe de f restreint à la section Dirichlet (respectivement Neumann) autour de ξ_i (respectivement η_i), i.e.

$$S_i := \{(x(\theta, r), y(\theta, r), f(\theta, r)) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ avec} \\ r \in [0, 1], \theta \in [\xi_i - \frac{l_D}{2n}, \xi_i + \frac{l_D}{2n}]\}$$

$$T_i := \{(x(\theta, r), y(\theta, r), f(\theta, r)) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ avec} \\ r \in [0, 1], \theta \in [\eta_i - \frac{l_D}{2n}, \eta_i + \frac{l_D}{2n}]\}$$

L'idée est de travailler sur chacun des secteurs, puis de les recoller.

En particulier, on peut augmenter successivement un secteur plusieurs fois. En effet, pour $\alpha \in [0, \frac{l_D}{n}]$ on considère

$$S_i^\alpha := \left\{ (x(\theta, r), y(\theta, r), f(\theta + \frac{\alpha}{2}, r)) \mid r \in [0, 1], \theta \in [\xi_i - \frac{l_D}{2n} - \frac{\alpha}{2}, \xi_i] \right\} \\ \cup \left\{ (x(\theta, r), y(\theta, r), f(\theta - \frac{\alpha}{2}, r)) \mid r \in [0, 1], \theta \in [\xi_i, \xi_i + \frac{l_D}{2n} + \frac{\alpha}{2}] \right\}$$

La fonction que ce graphe représente satisfait le Lemme 2.13 pour tout $(\xi_i - \alpha, \xi_j, \gamma)$ où $0 < \gamma \leq \alpha$. On peut donc augmenter encore ce secteur, ou le réduire d'un facteur plus petit que α . Il suffit donc de trouver une suite de transformations adéquates afin d'obtenir un graphe représentant une fonction de $V_{a_1 b_1 \dots a_n b_n}$.

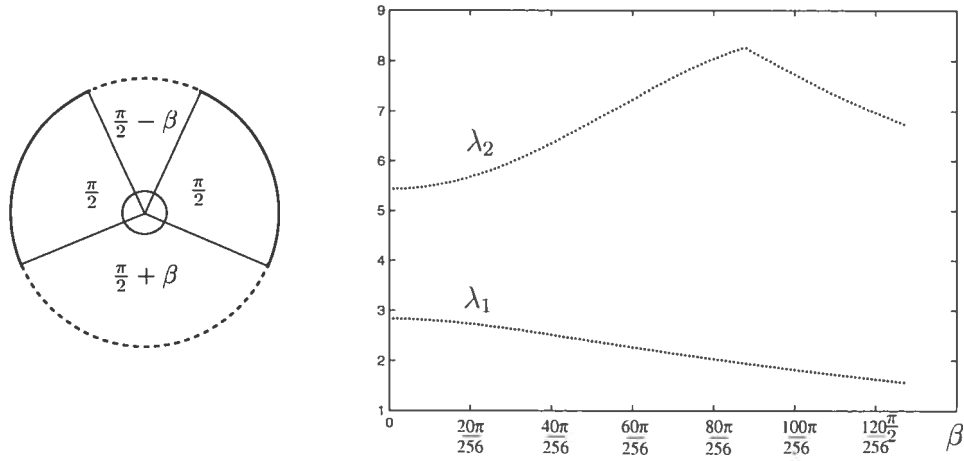
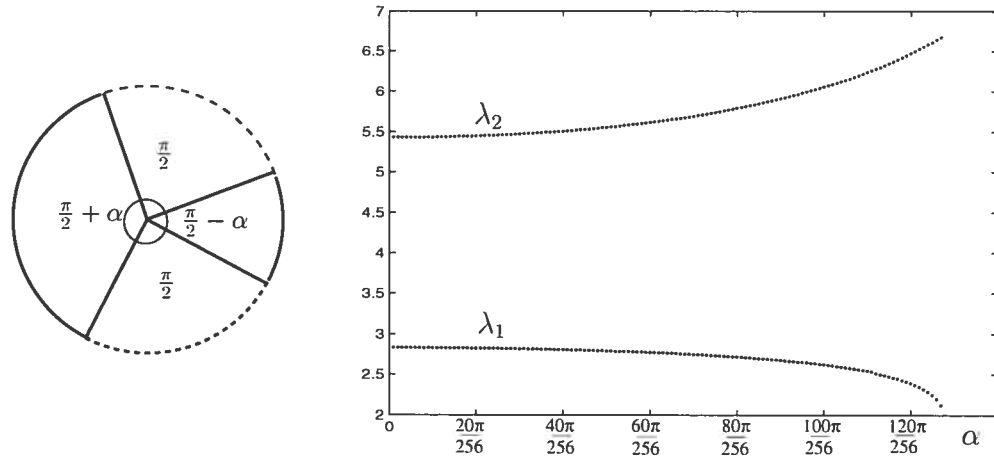
2.3.3. Application aux polygones réguliers

Il est immédiat qu'on peut appliquer le même type de réarrangement sur les domaines planaires possédant un nombre suffisant d'axes de symétrie. Cependant, les domaines obtenus ne seront pas nécessairement les mêmes que ceux de départ. Quelques domaines précis, avec des conditions précises pourront être transformés. Par exemple, les polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés sont des candidats intéressants pour ce type de réarrangement. Notons P_{2n} le polygone régulier à $2n$ côtés, de diamètre égal à 2, centré à l'origine de \mathbb{R}^2 et notons $(c_i)_{i=1}^{2n}$ les $2n$ côtés consécutifs. Soit $\Gamma := \cup_{i=1}^n c_{2i}$, alors pour tout ensemble de n entiers : $\alpha_1, \dots, \alpha_n \subset \{1, \dots, 2n\}$, $\lambda_1(\Gamma) \geq \lambda_1(\cup_i^n c_{\alpha_i})$.

2.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les tests numériques ont été effectués avec PDEtool de Matlab, sur un disque de rayon 1.

Les résultats numériques exhibés dans la figure 2.6 concerne la famille de partition obtenue dans la Proposition 2.2 comme contenant la partition minimisante pour la deuxième valeur propre. Le graphique laisse à penser que c'est la 2-partition complètement symétrique qui minimise λ_2 et maximise λ_1 sur cette famille. Le comportement du graphe de λ_2 , autour du maximum qu'elle atteint, ne semble pas lisse. De plus, il semble lié à celui de la ligne nodale (autour de ce même point). Ce dernier sera étudié dans la section 2.5.1.

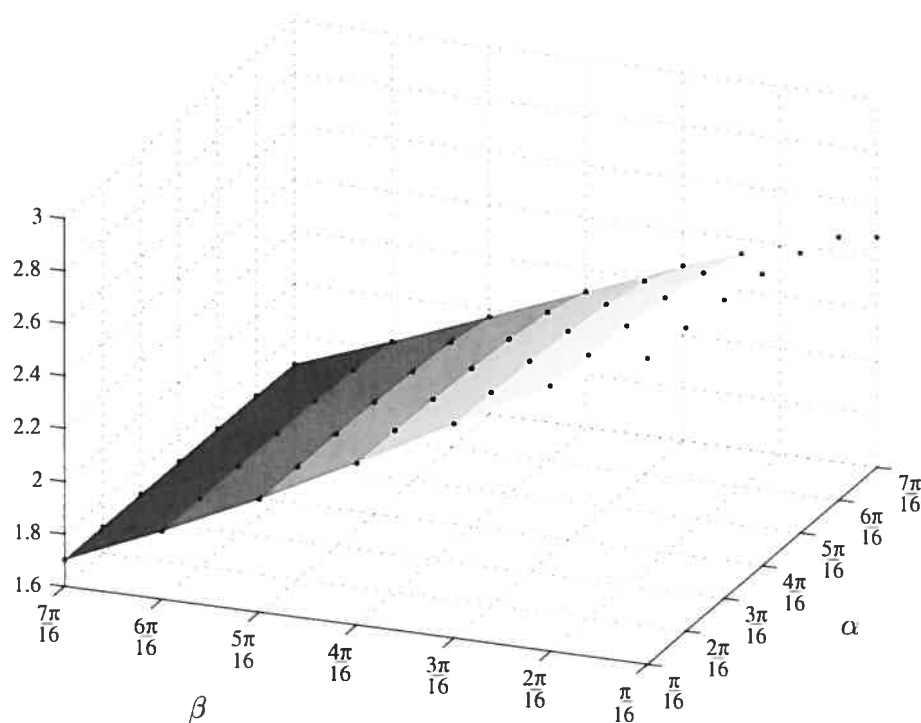
FIG. 2.6 Variation des deux premières valeurs propres en fonction de β FIG. 2.7 Variation des deux premières valeurs propres en fonction de α 

2.5. CONCLUSION ET ANALYSE DES RÉSULTATS

2.5.1. Quelques conjectures pour λ_2

La Proposition 2.2 n'implique pas qu'une partition précise minimise λ_2 , elle implique seulement que le minimum est atteint par une 2-partition. Elle est liée à

FIG. 2.8 Variation de la première valeur propre en fonction de deux paramètres α et β



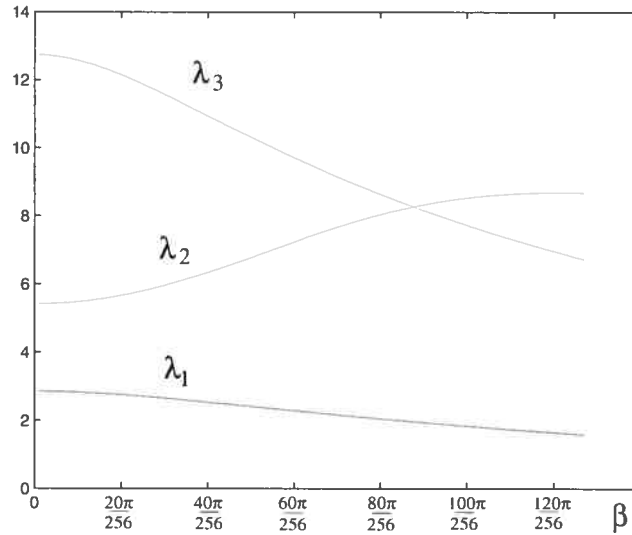
la Conjecture 2.3 dans le sens où si celle-ci n'est pas vérifiée pour toutes les 2-partitions alors le minimum est atteint par la 1-partition. Les tests numériques de la section 2.4 appuient la candidature de la 2-partition complètement symétrique comme minimum pour λ_2 , et la Conjecture 2.3.

Conjecture 2.15. *La 2-partition complètement symétrique réalise le minimum pour le disque planaire sur l'ensemble des partitions du bord de longueur donnée. Remarquons un certain parallèle avec la conjecture suivante exposée dans l'article de Henrot [H].*

Conjecture 2.16. (Henrot). *Le domaine planaire, convexe, réalisant le minimum pour $\lambda_2(\text{Dir.})$ a deux axes de symétrie perpendiculaires.*

Ces questions sont liées au comportement de la ligne nodale qui est encore mal compris même pour le problème de Dirichlet ou Neumann sur des domaines génériques. Par exemple sur un triangle isocèle T , de hauteur h et de base b , les tests numériques montrent une première ligne nodale le long de la hauteur lorsque b/h est proche de 1 (ou plus petit) et une première ligne nodale parallèle à la base sinon. Ce changement de ligne nodale affecte évidemment la deuxième valeur propre. Dans la Figure 2.6, le graphe de la deuxième valeur propre en fonction de $\beta \mapsto \lambda_2(\Gamma_{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-\beta))$, exhibe un changement brusque autour de $86\pi/256$. Ce point critique correspond à une seconde valeur propre de plus grande multiplicité, comme l'indique le graphique de la Figure 2.9. La suite des lignes nodales

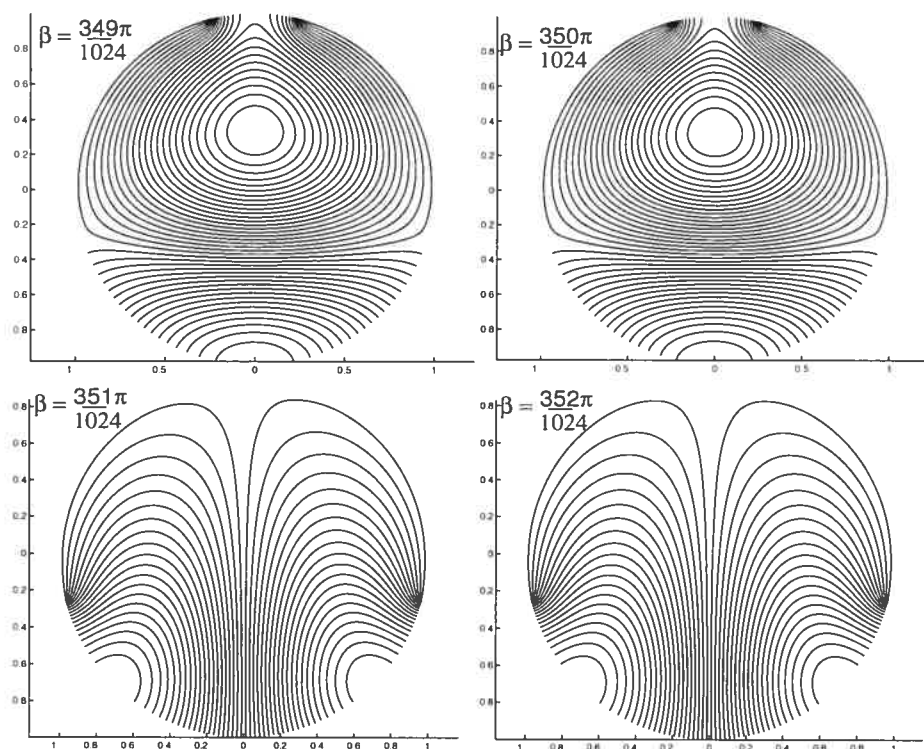
FIG. 2.9 Courbes représentant les trois premières valeurs propres de la famille de partition donnée par β (voir Figure 2.6)



associées change aussi brutalement à ce point. De fait, en raffinant les partitions du bord impliquées dans ce test et en prenant les lignes de niveau des deuxième fonctions propres associées aux valeurs propres autour de cette valeur spéciale, on remarque que le changement brusque s'opère aussi sur la position des lignes

nodales nodales entre les valeurs $\beta = \frac{351\pi}{1024}$ et $\beta = \frac{352\pi}{1024}$ qui correspondent respectivement aux partitions $\Gamma_{\frac{\pi}{2} \frac{161\pi}{1024}}$ et $\Gamma_{\frac{\pi}{2} \frac{160\pi}{1024}}$ (voir figure 2.9). La figure 2.10 représente les lignes de niveau des fonctions produites par le programme Matlab. Remarquons que pour les deux premières figures, $\beta \leq \frac{351\pi}{1024}$, présentent la ligne nodale horizontale, tandis que les deux figures suivantes, $\beta \geq \frac{351\pi}{1024}$, indiquent une ligne nodale verticale. Il semble que l'on peut caractériser chacune des courbes lisses présentées dans le graphique de la Figure 2.9 par la position ligne nodale.

FIG. 2.10 Ligne de niveau des deuxièmes fonctions propres associées à des partitions autour d'une valeur propre spécial



2.5.2. Isospectralité et conditions mixtes

Dans la section 2.3 nous avons obtenu un maximum sur une classe spécifique de fonctions sur le disque. L'un des intérêts de ce résultat vient de la Conjecture 2.15

qui affirme que la partition du bord qui minimise la deuxième valeur propre est la 2-partition complètement symétrique. Ainsi sur l'ensemble des partitions du bord à au plus deux composantes connexes, le maximum de la première valeur propre et le minimum de la deuxième seraient atteints par la même configuration. Un autre intérêt de ce résultat est donné par une conjecture concernant une certaine "rigidité" du disque plat.

Définition 2.17. *On dit qu'une variété riemannienne à bord (M, g) admet une Dirichlet-Neumann isospectralité s'il existe une partie ouverte Γ du bord telle que $\text{Spec}(M, \Gamma) = \text{Spec}(M, \Gamma^c)$ (avec multiplicité).*

On dit alors que (M, Γ) est Dirichlet-Neumann isospectrale.

On dit aussi que (M, Γ) est trivialement Dirichlet-Neumann isospectrale s'il existe une isométrie $\psi \in \text{Isom}(M, g)$ telle que $\psi(\Gamma) = \Gamma^c$.

Conjecture 2.18. ([JLNP], 2006) *Le disque n'admet pas de Dirichlet-Neumann isospectralité non-triviale.*

Il est à remarquer que, si (M, Γ) est Dirichlet-Neumann isospectrale, alors $\text{Vol}(\Gamma) = \text{Vol}(\Gamma^c)$. En effet, ceci est une conséquence des résultats concernant le développement asymptotique du noyau de chaleur qui est une théorie puissante et hautement non triviale qui ne sera pas exposée dans ces pages. Il y a différentes références pour cette théorie dans le cas mixte, l'article d'Avramidi [Av] expose un point de vue local et s'appliquant à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les formes. Une autre approche, plus globale, est donnée par Dowker dans l'article [Do].

Une façon de démontrer la Conjecture 2.18, dans le cas où Γ est une 2-partition est de montrer que pour tout $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'application $b \mapsto \lambda_1(\Gamma_{a,b})$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ici, on peut remarquer que les tests numériques de la section 2.4 appuient cette démarche et que le Théorème 2.4 en est un résultat partiel.

Enfin, la famille de configurations donnée par $[0, \frac{\pi}{2}] \ni \beta \mapsto \Gamma_{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\beta)}$ (avec les notations de la section 2.3, voir figure 2.2) est aussi apparue dans la Proposition 2.2 comme contenant le minimum de la deuxième valeur propre sur le disque plat.

Chapitre 3

LE THÉORÈME DE SUNADA ET CONDITIONS MIXTES

Le but de ce chapitre est d'abord d'introduire les notions de base à la compréhension du Théorème de Sunada. Celui-ci a permis de construire plusieurs exemples instructifs de variétés isospectrales et non-isométriques dans le cas où les variétés sont fermées et dans le cas de domaines à bord pour les problèmes homogènes de Neumann et Dirichlet. C'est à partir de ce résultat que furent construits les premiers exemples de domaines planaires isospectraux et non-isométriques en 1992 par Gordon Webb et Wolpert [GWW]. Ce chapitre présente le Théorème de Sunada d'un point de vue général incluant les cas où il est question de variétés à bord où l'on considère un problème mixte. Des exemples de domaines isospectraux et non-isométriques pour des conditions mixtes au bord, construits à l'aide du Théorème de Sunada, seront donnés dans ce chapitre et une application de ce dernier théorème pour les conditions de Dirichlet. On met en lumière une structure algébrique commune à certains exemples de variété possédant une partie du bord Dirichlet-Neumann isospectrale.

3.1. SPECTRE ET QUOTIENT RIEMANNIEN

3.1.1. Passage au quotient

Soit (M, g) une variété lisse et G un sous-groupe de son groupe d'isométries, les orbites de G sur M (i.e les ensembles $G(p) := \{\tau(p) | \tau \in G\}$, pour $p \in M$) définissent des classes d'équivalence sur M ($p \in G(q) \leftrightarrow q \in G(p)$). On définit l'ensemble

quotient pour cette relation d'équivalence par $M/G := \{\text{orbite de } G \text{ dans } M\}$ et le passage au quotient : $\pi_G : M \rightarrow M/G$. On peut munir M/G de la topologie quotient, c'est-à-dire qu'un ouvert de M/G est un ensemble dont la pré-image est un ouvert de M , ainsi π_G est une application continue. On est intéressé à savoir si M/G est une variété, le cas échéant, on verra que, munie de la métrique adéquate et avec les bonnes conditions au bord, $\text{Spec}(M/G) \subset \text{Spec}(M)$. Les définitions et théorèmes suivants fournissent les conditions pour que M/G soit une variété.

Définition 3.1. *On dit que G a une action proprement discontinue sur M , si son action satisfait les propriétés suivantes:*

- i) elle est **propre** $\forall p, q \in M$, t.q. $p \notin G(q)$, $\exists U, V \subset M$ des voisinages de p et q respectivement, t.q. $\forall \tau \in G$, $\tau(U) \cap V = \emptyset$,
- ii) $\forall p \in M$, $|\text{Stab}_p G| < \infty$,
- iii) $\forall p \in M$, $\exists U \subset M$ un voisinage de p , t.q. $\forall \tau \in \text{Stab}_p G$, $\tau(U) = U$ et $\forall \tau \in G \setminus \text{Stab}_p G$ $\tau(U) \cap U = \emptyset$.

La première propriété, nous assure que le quotient sera Hausdorff. La troisième permet une description locale. En fait, les dernières propriétés donnent une structure d'orbivariété au quotient (voir définition 3.4).

L'action d'un groupe fini sur une variété est toujours proprement discontinue.

Définition 3.2. *G a une action libre, si $\forall p \in M$, $\text{Stab}_p G = \{id_G\}$.*

Théorème 3.3. *Si G a une action lisse, propre et libre sur M , alors M/G a une structure de variété (aussi lisse que M) compatible avec le passage au quotient qui est alors un revêtement. De plus, si M est connexe (respectivement compacte) alors M/G est connexe (respectivement compacte).*

La démonstration de ce dernier théorème est bien connue et se trouve par exemple dans [GHL]. Dans le cas où l'action du groupe n'est pas libre mais seulement proprement discontinue, le quotient n'a pas nécessairement une structure de variété mais celle d'une "orbivariété". Bien que le spectre d'orbivariété ne sera pas étudié de façon générale, la définition est donnée afin de clarifier la discussion (tirée de [T]).

Définition 3.4. Une orbivariété O de dimension n est un espace topologique hausdorff, $|O|$, muni d'un atlas particulier $\{(U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ où $\{U_\alpha\}_\alpha$ est un recouvrement de $|O|$ fermé sous l'intersection et $\forall \alpha$, \tilde{U}_α est un ouvert de \mathbb{R}^n , G_α un groupe fini ayant une action sur \tilde{U}_α et $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha/G_\alpha$ un homéomorphisme. De plus, si $U_\beta \subset U_\alpha$ alors il existe $f_{\beta\alpha} : G_\beta \rightarrow G_\alpha$ un homomorphisme injectif et un plongement $\varphi_{\beta\alpha} : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{U}_\alpha$, tel que $\forall \tau \in G_\beta$, $\varphi_{\beta\alpha}(\tau(p)) = f_{\beta\alpha}(\tau)(\varphi_{\beta\alpha}(p))$.

Autrement dit, une orbivariété est un espace topologique localement modelé sur le quotient de \mathbb{R}^n par un groupe fini et satisfaisant des conditions de compatibilité rendant cette structure cohérente. Par exemple, une variété est une orbivariété, une variété quotientée par un groupe fini ou ayant une action proprement discontinue en est une aussi. L'espace topologique sous-jacent à l'orbivariété n'est pas nécessairement une variété, par exemple si on quotiente par la relation antipodale la boule de dimension 3, centrée à l'origine de \mathbb{R}^3 , on n'obtient pas une variété (le bord de tout ouvert autour de l'origine est \mathbb{RP}^2 qui n'est pas homéomorphe à S^2). Cependant, on peut montrer qu'en dimension deux le quotient d'une variété par un groupe agissant de façon proprement discontinue a quand même une structure de variété topologique et même lisse par morceaux, compatible avec la structure d'orbivariété. Ceci découle du corollaire 1.8, en effet le stabilisateur d'un point est, à isomorphisme près, un sous-groupe du groupe des matrices orthogonales $O(n, \mathbb{R})$ (où n est la dimension de la variété). Dans le cas de dimension deux, et en se restreignant aux sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$, il ne reste que trois possibilités : soit c'est un groupe cyclique C_k , diedral D_{2k} ou un groupe de réflexion d'ordre deux \mathbb{Z}_2 . Dans le premier cas, $B_1(0)/C_k$ est un cône d'angle $2\pi/k$, le deuxième $B_1(0)/D_{2k}$ est un secteur d'angle π/k et le troisième $B_1(0)/\mathbb{Z}_2$ est un demi-disque. Ces ensembles possèdent une structure de variété lisse par morceaux avec ou sans

bord, compatible avec la structure donnée par le passage au quotient. On a donc le résultat suivant :

Théorème 3.5. (voir [T]) *Soit (M, g) une variété riemannienne lisse, compacte, de dimension 2 et G un groupe agissant de façon proprement discontinue et isométrique sur M , alors M/G a une structure de variété lisse par morceaux compatible avec le passage au quotient.*

3.1.2. Spectre et variété quotient.

Dans le cas où une orbivariété est le quotient d'une variété (riemannienne) par un groupe agissant de façon proprement discontinue (et isométrique), il est naturel de définir les structures et objets différentiels (et riemanniens) comme ceux définis sur la variété totale, invariants par l'action du groupe. En fait, si le quotient est une variété cette définition concorde avec les véritables structures et objets différentiels. En effet, soit M est une variété riemannienne lisse où $G < \text{Isom}(M, g, \Gamma)$ agit de façon propre et libre. Alors π_G est un revêtement, pour en faire un **revêtement riemannien**, on munit M/G de la métrique \tilde{g} telle que π_G soit une isométrie locale (i.e $\pi_G^* \tilde{g} = g$). Ainsi, π_G préserve la connexion, le laplacien, etc. On considère le problème mixte sur M/G , déterminé par $\pi_G(\Gamma)$.

Il y a une correspondance bi-univoque naturelle entre les espaces de fonctions de M/G et les espaces de fonctions de M invariantes par G . En effet, pour $f : M \rightarrow X$ une application invariante (i.e constante sur les orbites de G) alors $\tilde{f} : M/G \rightarrow X$ est bien définie par $\tilde{f}(G(p)) = f(p)$. Inversement, une fonction de M/G définit trivialement une fonction de M constante sur les orbites. La différentiabilité de l'une dépend de la différentiabilité de l'autre dès que G agit de façon lisse (i.e chacun de ses éléments est un difféomorphisme lisse).

Si G a une action à droite sur un espace E , on note E^G , le sous-espace de E invariant par l'action de G i.e $E^G := \{e \in E \mid \forall \tau \in G, e \circ \tau = e\}$.

On a $C^\infty(M/G) \cong C^\infty(M)^G$, de plus comme les espaces propres du laplacien sur M sont fermés sous l'action de G , on a que si $\dim E_\lambda^G$ est non-nulle, pour un

certain $\lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma)$, alors $\lambda \in \text{Spec}(M/G, \pi_G(\Gamma))$. Inversement, toute fonction propre associée à une certaine valeur propre $\lambda \in \text{Spec}(M/G, \pi_G(\Gamma))$ définit une fonction propre dans E_λ^G . Donc

Proposition 3.6. $\forall \lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma), E_\lambda(M, \Gamma)^G \cong E_\lambda(M/G, \pi_G(\Gamma))$.

Si G est un sous-groupe du groupe d'isométries qui agit de façon proprement discontinue sur (M, g) une variété riemannienne, on définit le spectre sur l'orbivariété $(M/G, \tilde{g})$ à l'aide des fonctions propres qui passent au quotient. Si le quotient a une structure de variété compatible avec le passage au quotient alors, comme on l'a vu, le spectre de cette variété concorde avec celui donné par la structure d'orbivariété. Si M a des bords, on peut considérer le spectre du problème mixte pour un certain $\Gamma \subset \partial M$ et le spectre correspondant sur M/G par rapport à $\pi_G(\Gamma)$, où G doit être constitué d'éléments qui préservent Γ , du groupe $\text{Isom}(M, g, \Gamma) = \{\phi \in \text{Isom}(M, g) \mid \phi(\Gamma) = \Gamma\}$.

3.2. LE THÉORÈME DE SUNADA

Le Théorème de Sunada exhibe une condition algébrique sur des sous-groupes d'isométries d'une variété riemannienne pour que les quotients par ces groupes soit isospectraux. Cette condition est un peu plus faible que la conjugaison des deux sous-groupes qui impliquerait que les quotients sont isométriques.

Théorème 3.7 (Sunada, 1984). *Soit M une variété riemannienne fermée, compacte, connexe, lisse et soit $G < \text{Isom}(M, g)$ un sous-groupe fini de son groupe d'isométries, dont l'action sur M est libre. Soient $H, K < G$ tels que pour tout $\tau \in G$*

$$\#([\tau] \cap H) = \#([\tau] \cap K), \quad (\dagger)$$

alors avec les métriques induites par les passages aux quotients respectifs π_H et π_K ,

$$\text{Spec}(M/H) = \text{Spec}(M/K).$$

En fait, la preuve ci-dessous est due à Buser [Bu] et s'applique au cas où l'action n'est pas libre et la variété est à bord. Le théorème obtenu, plus général, fut d'abord prouvé par Bérard [Be].

Théorème 3.8 (Bérard, 1992). *Soit M une variété riemannienne, compacte, connexe, lisse et soit $G < \text{Isom}(M, g, \Gamma)$ un sous-groupe fini de son groupe d'isométries préservant les conditions au bord. Soient $H, K < G$ tels que pour tout $\tau \in G$*

$$\#([\tau] \cap H) = \#([\tau] \cap K), \quad (\dagger)$$

alors, avec les métriques induites par les passages aux quotients respectifs

$$\text{Spec}(M/H, \pi_H(\Gamma)) = \text{Spec}(M/K, \pi_K(\Gamma)).$$

Démonstration. On a

$\text{Spec}(M/H, \pi_H(\Gamma)) = \text{Spec}(M/K, \pi_K(\Gamma)) \leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma) \dim E_\lambda^H = \dim E_\lambda^K$.
Soit A_h^λ , la représentation de $h \in H$ dans E_λ comme à la section 1.4.2, alors $\dim E_\lambda^H = \text{trace}(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} A_h^\lambda)$, parce que $(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} A_h^\lambda)$ est la projection de E_λ sur E_λ^H . La condition (\dagger) nous assure qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les éléments de K et de H , donnée par la conjugaison. Cette correspondance préserve donc la trace pour toute représentation matricielle de G et $|H| = |K|$. Par linéarité de la trace :

$$\dim E_\lambda^H = \text{trace}(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} A_h^\lambda) = \text{trace}(\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} A_k^\lambda) = \dim E_\lambda^K.$$

□

Remarque 3.9.

1- La démonstration ci-dessus ne nécessite pas une action libre. C'est le spectre des orbivariétés, donné par le passage au quotient, qui est considéré dans le Théorème 3.8. Dans le cas où M/H ou M/K est une variété, leurs spectres concordent avec le celui défini par le passage au quotient (voir sous-section 3.1.2).

- 2- Il est possible que les orbivariétés aient des bords apparus lors du passage au quotient. Les conditions sur ces bords seront le sujet de la section 3.3.
- 3- La première démonstration purement algébrique du Théorème de Sunada fut produite par Pierre Bérard dans [Be], elle utilise la transplantation de fonctions. Nous verrons cette technique plus en détails à la sous-section 3.2.1.
- 4- Notons que le Théorème de Sunada ne nous assure pas que les variétés M/K et M/H ne sont pas isométriques. En particulier, K et H sont conjugués dans $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$ (i.e $\exists \tau \in \text{Isom}(M, g, \Gamma)$ t.q $\tau \circ H \circ \tau^{-1} = K$) si et seulement si M/K et M/H sont isométriques. L'isométrie est alors déterminée par l'élément τ qui les conjugue (i.e $\pi_K \circ \tau : \pi_H^{-1}(M/H) \rightarrow M/K$ produit une isométrie). Inversement, si elles sont isométriques, par relèvement des applications, on montre que K et H sont conjugués dans $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$.
- 5- Il existe des triplets (G, H, K) vérifiant la condition de Sunada (\dagger) et des exemples non-triviaux de variétés isospectrales peuvent être construits. La prochaine section détaille un exemple.
- 6- Il existe plusieurs extensions du Théorème de Sunada. Par exemple si M n'est pas compacte et G, H, K ne sont pas finis mais que M/H et M/K sont compactes alors on peut dire que ces dernières sont isospectrales si les représentations induites par H et K respectivement, sont équivalentes. Ces questions se traitent à l'aide de notions avancées de la théorie des représentations.

3.2.1. Transplantation de fonctions

Dans le cas où M est une variété compacte, connexe, Bérard [Be] a montré que l'isospectralité des variétés quotients construites par le Théorème de Sunada est donnée aussi par l'existence d'une application spéciale entre les espaces propres $E_\lambda(M/H, \pi_H(\Gamma))$ et $E_\lambda(M/K, \pi_K(\Gamma))$ pour $\lambda \in \text{Spec}(M, \Gamma)$. En fait, la condition de Sunada implique que les représentations induites ρ_H et ρ_K de G dans $\mathcal{L}(H \backslash G)$ et $\mathcal{L}(K \backslash G)$, respectivement, sont équivalentes. Ceci implique notamment qu'il existe

un isomorphisme, appelé opérateur d'entrelacement, entre les espaces $\mathcal{L}(H \backslash G)$ et $\mathcal{L}(K \backslash G)$ qui respecte l'action de G sur ces ensembles (i.e $T : \mathcal{L}(H \backslash G) \rightarrow \mathcal{L}(K \backslash G)$ tel que $T \circ \rho_H = \rho_K \circ T$).

L'idée de Bérard est de représenter M/H et M/K comme $|H \backslash G| = |K \backslash G|$ copies de M/G recollées en respectant la combinatoire imposée par G sur $H \backslash G$ et $K \backslash G$ respectivement, puis de faire une transplantation de fonctions propres. Grossièrement, cette transplantation est définie pour une fonction de M/H en prenant sa restriction à chacune des copies de M/G , la condition de Sunada (†) nous assure ensuite qu'il existe une combinaison linéaire de ces restrictions sur chacune des copies de M/G constituant M/K , dont le recollement sur M/K produit une fonction lisse satisfaisant les conditions au bord (s'il est non vide).

Plus précisément, supposons, pour la simplicité, que (M, g) est fermée, connexe et $G < \text{Isom}(M, g)$. Soit $F_G \subset M$ un domaine fondamental de l'action de G sur M . Posons $|H \backslash G| = |K \backslash G| = m$ et soient $M/H = \bigcup_{i=1}^m \overline{B}_i$, où $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\overline{B}_i \cong F_G$, $\forall i = 1, \dots, m$. De même, on pose $M/K = \bigcup_{i=1}^m \overline{C}_i$, où $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\overline{C}_i \cong F_G$, $\forall i = 1, \dots, m$. Pour $f \in \mathcal{L}(M/H)$, notons $f_i : \overline{B}_i \rightarrow \mathbb{R}$, la restriction de f au "bloc" B_i . Étant donné que $\forall i, j = 1 \dots k$, $\overline{B}_i \cong F_G \cong \overline{C}_j$ ceci nous permet de définir correctement $f_i : \overline{C}_j \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.10. Une transplantation, $\mathcal{T} : E_\lambda(M/H) \rightarrow E_\lambda(M/K)$, est définie pour tout $f \in E_\lambda(M/H)$ par

$$(\mathcal{T}(f))_j = \sum_i \alpha_{ij} f_i : \overline{C}_j \rightarrow \mathbb{R}$$

où la matrice (α_{ij}) est dans $\text{GL}(m, \mathbb{R})$ et que si $x \in \overline{C}_i \cap \overline{C}_k \neq \emptyset$ alors $\sum_i \alpha_{il} f_l(x) = \sum_i \alpha_{ik} f_k(x)$.

Remarque 3.11. La deuxième condition implique que si f est admissible et continue alors $\mathcal{T}(f)$ est une fonction continue sur M/K et admissible par morceaux, elle est donc bien dans $\mathcal{H}(M/K)$. Si M a des bords, on rajoute des conditions afin que les conditions au bord soient satisfaites. Enfin, il est clair qu'elle envoie une fonction propre vers une autre fonction propre, parce qu'en chaque point, la

fonction obtenue est une combinaison linéaire finie de fonctions propres (associées à la même valeur propre).

Dans son article [Be], Bérard montre qu'un opérateur d'entrelacement T , donné par la condition de Sunada, fournit une transplantation. Si l'on écrit $T = (t_{ij})$ pour des bases choisies de $\mathcal{L}(H \backslash G)$ et $\mathcal{L}(K \backslash G)$, la matrice $(\alpha_{ij}) := (t_{ij})$ satisfera les conditions de transplantation, si l'on nomme de façon cohérente les partitions respectives de M/H et M/K en fonction de l'action des générateurs associés à F^G sur $H \backslash G$ et $K \backslash G$, respectivement.

La preuve de Bérard, bien qu'étant un peu lourde de notations, est très instructive. Elle permet, d'une part, d'affirmer qu'il existe toujours une transplantation lorsque deux variétés isospectrales respectent le Théorème de Sunada. D'autre part, elle a permis d'étendre le théorème aux actions de groupes qui ne sont pas libres.

3.3. CONDITIONS AU BORD POUR LES SURFACES QUOTIENTÉES

Restreignons-nous au cas de la dimension deux. Si l'action n'est pas libre, comme on l'a vu précédemment, le quotient a tout de même une structure de variété. Cependant, il risque d'y avoir des hypersurfaces (courbes) fixes sous l'action de H et de K . Dans ce cas, les variétés obtenues ont des bords dont la pré-image par le passage au quotient n'en est pas un. On peut se demander alors quels types de conditions sont satisfaites sur ces hypersurfaces par les fonctions de E_λ^H ou de E_λ^K pour une valeur propre λ donnée. C'est la condition de Neumann qui est satisfaite. En effet, le problème étant local, on peut se ramener au cas où une fonction est définie sur $B_1^2(0)$ (la boule unité dans \mathbb{R}^2) et est invariante par la réflexion $(x, y) \mapsto (-x, y)$. En fixant $y_0, |y_0| < 1$ on a $(\partial_x f)|_0 = (\partial_{-x} f)|_0 = -(\partial_x f)|_0 = 0$. Donc le Théorème de Sunada (version de Bérard), stipule bien que sous la condition (†), $\text{Spec}(M/H, \pi_H(\Gamma)) = \text{Spec}(M/K, \pi_K(\Gamma))$, où $\pi_H(\Gamma)$ et

$\pi_K(\Gamma)$ ne contiennent pas les "nouveaux" bords.

Cependant, supposons que tout le bord des surfaces apparaît lors du passage au quotient (on suppose M connexe, compacte et sans bord), les surfaces obtenues par passage aux quotients sont isospectrales avec des conditions de Neumann au bord. On peut montrer qu'elles sont aussi isospectrales pour les conditions de Dirichlet, dans le cas où M , M/H et M/K sont orientables. Pour prouver cela, nous avons besoin d'une représentation géométrique plus précise des actions de groupes sur une variété orientée donnée par les pavages.

3.3.1. Pavages et réflexion

La démonstration du Théorème de Sunada donnée par Pierre Bérard dans [Be] utilise une description précise des variétés quotients qui nous sera utile ici. L'idée est que pour un sous-groupe H d'un groupe fini G agissant de façon isométrique sur (M, g) , on peut représenter M/H comme $|G/H|$ copies de M/G recollées en respectant la combinatoire imposée par G sur $H \backslash G$. Plus précisément, supposons, pour la simplicité, que (M, g) est fermée, connexe, pas nécessairement compacte mais complète (i.e deux points quelconques peuvent être liés par une géodésique) et que G est un groupe discret agissant de façon proprement discontinue, et tel que M/G soit compacte, notons $\pi_G : M \rightarrow M/G$, le passage au quotient. On définit F_G un **domaine fondamental** de l'action de G sur M comme un ensemble satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1 - $F_G \subset M$ et F_G est connexe,
- 2 - Pour tout $x \in M$, $G(x) \cap F_G \neq \emptyset$,
- 3 - Pour tout $x \in F_G$ et tout $g \in G$, $g(x) \notin F_G \setminus \{x\}$.

L'idée d'un tel domaine est de trouver un ensemble connexe dans M , qui contienne un et un seul élément de chaque orbite de G . Par exemple, un domaine fondamental du groupe des translations entières de \mathbb{R}^2 est donné par un carré ouvert

auquel on ajoute deux de ses cotés adjacents. Un domaine fondamental de la relation antipodale sur le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 est le demi-disque fermé, privé de la moitié de son diamètre. L'existence d'un tel domaine n'est pas évidente à priori pour un groupe n'agissant pas librement. Dans ce cas, nous devons caractériser les réflexions.

Définition 3.12. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n , on définit une **réflexion** comme un élément $\tau \in \text{Isom}(M, g)$ telle que $\text{Fix}_\tau M$ est une sous-variété de dimension $n - 1$.

Remarque 3.13. Pour τ une isométrie non-triviale contenant une sous-variété N dans ses points fixes $\text{Fix}_\tau M$, pour $p \in N$, $d_p \tau$ laisse fixe un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$. Soit $v \in T_p M$, un vecteur orthogonal à ce sous-espace (par rapport à la métrique g), comme $d_p \tau$ préserve la norme ainsi que l'orthogonalité et que ce n'est pas l'identité, elle envoie v vers $-v$. En particulier, τ est d'ordre deux et il n'existe aucun point fixe, autre que les points de N , dans l'image de l'exponentielle en p . Par complétude, il n'existe aucun autre point que ceux de N dans $\text{Fix}_\tau M$. Donc, τ est une réflexion.

Les réflexions sont des éléments du groupe d'isométries de M qui changent l'orientation (i.e en chaque point, leur jacobien est négatif). Être une réflexion est une caractéristique de classe de conjugaison dans le sens où τ est une réflexion si et seulement si pour tout $\sigma \in \text{Isom}(M, g)$, $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ en est une.

Maintenant, on veut montrer l'existence des domaines fondamentaux F_G , lorsque G est un sous-groupe du groupe d'isométries de (M, g) , variété riemannienne complète (et donc connexe), G ayant une action proprement discontinue. Posons $\mathcal{N} := \{p \in M \mid \text{Stab}_p G = \{id\}\}$, il est à noter que \mathcal{N} a une structure de variété ouverte dans M et que $\pi_G|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \pi_G(\mathcal{N})$ est un revêtement. On peut donc trouver un ensemble connexe V , contenant un et un seul représentant de l'orbite de tout point de \mathcal{N} . En particulier, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma(V)$ est une autre copie de V dans \mathcal{N} . Notons la fermeture de V dans \mathcal{N} , $\overline{V}_{\mathcal{N}}$ et la fermeture de V dans M , \overline{V}_M . Un domaine fondamental est donné par $V \cup (\overline{V}_M \setminus \overline{V}_{\mathcal{N}})$. Que le groupe

Lemme 3.14. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète, soit G un sous-groupe discret de son groupe d'isométries et soit F_{id} un domaine fondamental fixé de l'action de G sur M . Alors pour F_1, F_2, \dots, F_l les copies de F_G telles que $\text{codim}(\overline{F}_{id} \cap \overline{F}_i) = 1$, pour $i = 1 \dots l$ et τ_1, \dots, τ_l les éléments de G associés à ces copies (i.e $\tau_i(F_G) = F_i$), alors $B^G := \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ est un ensemble générateur (pas nécessairement minimal) de G et qui, à conjugaison près, ne dépend pas du choix de F_{id} .*

La figure 3.1 illustre cette construction pour le disque hyperbolique. Le groupe L impliqué ici est décrit à la section 3.4. L'image est extraite de [T], on y a fait apparaître une partie des éléments du groupe induisant le pavage. En conséquence du lemme précédent, les réflexions sont associées à des sections de $F_{id} \setminus \overline{F}_{id}$ incluses dans les hypersurfaces fixes correspondantes. Dans le cas où la dimension de M est deux, ces sections du bord sont des géodésiques. Pour les générateurs qui ne sont pas des réflexions, le passage de F_{id} à la copie voisine correspondante est donnée en identifiant des points de deux copies de \overline{F}_G , c'est ce cas qui est traité dans [Be] et nous nous concentrerons sur le cas des réflexions parce qu'il amène des applications et des exemples concernant le problème mixte.

Lemme 3.15. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe et orientable, soit G un sous-groupe fini de son groupe d'isométries et soit F_{id} un domaine fondamental fixé de l'action de G sur M et B^G défini dans le Lemme 3.14. Supposons que M/G ait une structure de variété compatible avec le passage au quotient alors si M/G est orientable les seuls éléments de B^G qui changent l'orientation de M sont des réflexions.*

Démonstration. Rappelons qu'une variété n'est pas orientable si son revêtement d'orientation, construit à l'aide du transport parallèle n'est pas trivial. C'est-à-dire, pour $q \in N$, où (N, h) est une variété riemannienne connexe, on prend un lacet γ_q basé en q , il est connu qu'on peut associer à γ_q un automorphisme $P_{\gamma_q} \in \text{Aut}(T_q N)$, qui, à conjugaison près, ne dépend pas de q . Pour $v \in T_q N$, $P_{\gamma_q}(v)$ est

défini comme le transport parallèle de v le long de γ_q , c'est-à-dire l'unique $P_{\gamma_q}(v) = w(1)$, où $w : [0,1] \rightarrow T_{\gamma_q(t)}N$ est tel que $\nabla_{\gamma'(t)} w(t) = 0$ pour tout t . En prenant une base de $T_q N$, on peut montrer que P_{γ_q} est auto-adjoint par rapport à h_q , en particulier son déterminant est non-nul. De plus, P_{γ_q} dépend continuellement de la classe d'homotopie de γ_q . Le morphisme $\tilde{sg} : \gamma \rightarrow \text{signe}(\det(P_\gamma))$ est donc bien défini sur le groupe fondamental $\pi_1(N)$ et ainsi: *N est orientable si et seulement si $\tilde{sg} : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est trivial.* On peut consulter [KN] pour les explications et les preuves.

Supposons qu'il existe un élément $\sigma \in B^G$ qui change l'orientation sans avoir d'hypersurface fixe alors il est possible de choisir un élément $p \in F_{id}$ et un chemin $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = \sigma(p)$ qui ne passe par aucun point fixe des éléments de B^G . En passant au quotient $\pi_G \circ \gamma$ est un représentant d'un élément du groupe $\pi_1(M/G)$. Le transport parallèle sur M/G est le transport parallèle sur M , étant donné qu'il dépend uniquement de la métrique obtenue par pull-back. Le morphisme \tilde{sg} , défini ci-dessus, n'est pas trivial sur ce représentant, donc M/G n'est pas orientable. \square

3.3.2. Le Théorème de Sunada pour le problème Dirichlet

Théorème 3.16. *Soit (M,g) une variété riemannienne, compacte, fermée et connexe et $G < \text{Isom}(M,g)$ fini. Supposons que $H, K < G$ satisfassent la condition (\dagger) (i.e $\forall \tau \in G, \#([\tau] \cap H) = \#([\tau] \cap K)$) et que M/H et M/K soient des variétés orientables à bord alors M/H et M/K sont isospectrales pour les conditions de Neumann et de Dirichlet.*

Démonstration. Le fait que M/H et M/K soient isospectrales pour les conditions de Neumann est simplement le Théorème de Bérard (3.8) avec la définition de spectre pour les orbivariétés et ne nécessite pas de condition sur l'orientabilité. Pour l'autre cas, on suppose la variété M orientable, sinon le revêtement d'orientation satisfait les mêmes propriétés que M et bien que les groupes d'isométries

soient différents, en caractérisant les éléments de la pré-image de G , H et K par le changement d'orientation qu'ils induisent on peut démontrer qu'ils satisfont aussi la condition de Sunada.

Soit F_{id}^H un domaine fondamental fixé de l'action de H sur M et $B^H := \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ l'ensemble générateur de H associé à l'ensemble des voisins de F_{id}^H , comme décrit dans le Lemme 3.14. Il y a une correspondance bi-univoque entre les fonctions satisfaisant les conditions de Dirichlet sur M/H et les fonctions sur M qui sont impaires par rapport aux réflexions génératrices de B^H . En effet, ces dernières s'annulent nécessairement sur les hypersurfaces laissées fixes par les éléments de B^H . De l'autre côté, une fonction s'annulant au bord de M/H se définit aisément sur F_{id}^H et peut être prolongée en une fonction continue sur M en posant d'abord $f(h(x)) = \text{sg}(h)f(x)$ pour $x \in F_{id}^H$ et $h \in H$. Ceci produit une fonction continue et aussi régulière que f dans la mesure où, d'une part, sg est un homomorphisme et d'autre part, les voisins de F_{id}^H partageant une section du bord que nous noterons $\Sigma = \overline{F_{id}^H} \cap h(\overline{F_{id}^H})$ pour $h \in B^H$ sont, par hypothèse :

- (1) soit obtenus par des éléments qui ne changent pas l'orientation ($\text{sg}(h) = 1$) et alors $h(\Sigma) \neq \Sigma$ et $\pi_H(\Sigma) \subset M/H$.
- (2) soit obtenus par des éléments qui changent l'orientation ($\text{sg}(h) = -1$), alors $h(\Sigma) = \Sigma$ et $\pi_H(\Sigma) \subset \partial M/H$ donc $f|_{\Sigma} = 0$.

Pour faciliter la lecture, les fonctions impaires par rapport aux éléments de H qui changent l'orientation sont maintenant appelées les fonctions H -impaires.

Comme pour la preuve du Théorème de Sunada nous allons montrer que, dans tout espace propre du Laplacien sur M , la dimension du sous-espace des fonctions H -impaires est la même que la dimension de l'espace des fonctions propres s'annulant sur le bord de M/K . Pour obtenir cette dimension on considère de nouveau la trace de la projection sur l'espace des fonctions H -impaires que nous allons définir ci-dessous.

Pour $\lambda \in \text{Spec}(M)$, $E_\lambda(M)$ est l'espace des fonctions propres du Laplacien associées à la valeur propre λ , on a une représentation matricielle de G dans $E_\lambda(M)$ donnée par A_g^λ (voir section 1.4.2). L'application qui va nous intéresser est

$$\text{pr}_{\lambda,H} := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \text{sg}(h) \cdot A_h^\lambda$$

Pour montrer que c'est bien la projection recherchée on vérifie premièrement que $\text{pr}_{\lambda,H}(f) = f$ pour une fonction f H -impaire. Ensuite, pour ϕ , une fonction quelconque de $E_\lambda(M)$, il faut montrer que $\text{pr}_{\lambda,H}(\phi)$ est impaire par rapport aux réflexions de B^H . En effet, soit $\tau \in H$, on a

$$A_\tau \circ \text{pr}_{\lambda,H}(\phi) = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \circ h \in H} \text{sg}(h) \cdot A_{\tau \circ h}^\lambda = \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \text{sg}(h') \cdot \text{sg}(\tau) \cdot A_{h'}^\lambda = \text{sg}(\tau) \cdot \text{pr}_{\lambda,H}(\phi)$$

Ainsi, l'opérateur $\text{pr}_{\lambda,H}$ est bien la projection sur les fonctions H -impaires. La condition de Sunada, la linéarité de l'opérateur trace, et le fait que les applications trace et sg soient constantes sur les classes de conjugaison, nous donnent

$$\text{trace}(\text{pr}_{\lambda,H}) = \text{trace}\left(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \text{sg}(h) \cdot A_h^\lambda\right) = \text{trace}\left(\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \text{sg}(k) \cdot A_k^\lambda\right)$$

L'opérateur $\sum_{k \in K} \text{sg}(k) \cdot A_k^\lambda$ est la projection sur l'espace des fonctions K -impaires. Ces fonctions s'annulent donc sur les bords des domaines fondamentaux de K correspondant à des éléments de B^K qui changent l'orientation. Par hypothèse, M/K est une variété orientable et donc par le Lemme 3.4.2 les éléments de B^K qui changent l'orientation sont des réflexions. \square

Remarque 3.17. *La condition d'orientabilité est nécessaire, Bérard et Webb ont exhibé dans [BW] un exemple de deux surfaces construites à partir d'un triplet de Sunada qui sont Neumann isospectrales mais pas Dirichlet isospectrales. L'une de ces surfaces est orientable, l'autre pas.*

3.4. UN EXEMPLE POUR LE THÉORÈME DE SUNADA

L'exemple de variétés isospectrales et non-isométriques qui est expliqué ici est un exemple de domaines planaires (dans \mathbb{R}^2) donné par Buser, Conway, Doyle et Semmler dans [BCDS]. La démonstration de leur isospectralité est donnée en termes de transplantation de fonctions et il y a très peu d'informations quant au groupe et aux différents sous-groupes impliqués. C'est ce dernier point de vue qui est décrit dans cette section.

3.4.1. Un triplet de Sunada (G, H, K)

D'abord il est important de trouver un groupe ayant des sous-groupes non-conjugués satisfaisant la condition de Sunada. Soit $G = \text{GL}(3, 2)$ le groupe des matrices inversibles 3×3 , à coefficients dans \mathbb{Z}_2 , nous allons montrer que les sous-groupes ayant les formes suivantes satisfont (†).

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & * & \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & * & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Théorème 3.18.

- 1- $\forall \tau \in G, \#([\tau] \cap H) = \#([\tau] \cap K)$,
- 2- H et K ne sont pas conjugués dans G .

La démonstration de ce théorème se retrouve dans [Bu].

3.4.2. La construction

Maintenant, pour construire des exemples de variétés isospectrales et non-isométriques il nous suffirait idéalement de trouver une variété riemannienne (M, g) dont le groupe d'isométries est exactement G et ensuite appliquer la méthode de Sunada. Puisque l'on cherche plus spécifiquement des exemples de dimension 2, il n'est pas évident que l'on pourra trouver une telle variété. C'est entre autres pour cette raison que le groupe $G := \text{GL}(3, 2)$ est particulièrement intéressant.

En effet, il est simple et a 168 éléments. À isomorphisme près, il n'existe qu'un seul groupe simple de 168 éléments. Comme $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_7)$ en est un aussi, on a $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_7) \cong \text{GL}(3, 2)$. D'autre part, il y a un homomorphisme surjectif connu de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_7)$, où $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{Id, -Id\}$ est appelé le groupe modulaire et a une action naturelle et isométrique sur le plan hyperbolique muni de la métrique de Poincaré (\mathbb{H}, ds) , c'est-à-dire $\mathbb{H} := \{zx + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ avec $ds := \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ et l'on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et la transformation $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : z \mapsto \frac{sz+t}{uz+v}$. Il est donc naturel de chercher des exemples dans le plan hyperbolique (ou l'une de ses représentations).

De plus, il suffit de chercher un groupe L agissant isométriquement sur le plan (ou le disque $(\tilde{\mathbb{D}}, d\tilde{s})$) hyperbolique tel qu'il existe un homomorphisme surjectif $\Phi : L \rightarrow G$. Ainsi $(\tilde{\mathbb{D}}/(\text{Ker}\Phi), d\tilde{s}^*)$ est une surface hyperbolique compacte contenant une image de G dans son groupe d'isométries. Pour s'assurer que les surfaces obtenues par le passage au quotient par H et K ne sont pas isométriques on verra qu'il est possible de déformer cette surface en conservant l'isospectralité.

On obtient ce groupe L en considérant le pavage du disque hyperbolique par un triangle équilatéral d'angle $\frac{\pi}{4}$. Le groupe de Weyl, L est déterminé par ses générateurs c'est-à-dire les 3 réflexions par rapport aux côtés de ce triangle.

$$L := \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = Id, (ab)^4 = (bc)^4 = (ac)^4 = Id \rangle$$

C'est le plus "gros" groupe ayant des générateurs satisfaisant ces propriétés [CM], dans le sens où tout groupe ayant des générateurs possédant ces relations est un quotient de L . On obtient l'homomorphisme surjectif recherché $\Phi : L \rightarrow G$, en vérifiant que les trois matrices suivantes satisfont ces relations dans G . Notons

$A = \Phi(a)$, $B = \Phi(b)$ et $C = \Phi(c)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il faut vérifier que ces matrices engendrent G . En fait, il suffit de vérifier qu'il est possible d'obtenir les matrices génératrices suivantes $E_{ij} := (e_{lk})$ où

$$e_{lk} := \begin{cases} 1 & \text{si } l = k \text{ ou si } l = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De fait, on trouve que $CABABC = E_{23}$, $BE_{23}B = E_{13}$ et posons $D = CBCAB$, on a $BABD = E_{31}$, $(AB)^3D = E_{32}$, $CBADABDABC = E_{21}$, et enfin $E_{12} = CBADABABACE_{32}$.

$\Phi : L \rightarrow G$ est donc un homomorphisme surjectif. Notons $N = \text{Ker } \Phi$. $M := \tilde{D}/N$, munie de la métrique $d\tilde{s}^*$ faisant de ce revêtement d'orbivariétés, un revêtement riemannien, est une surface constituée de 168 copies d'un triangle équilatéral hyperbolique. En particulier, M est compacte et connexe.

Proposition 3.19. *M est sans bord et non-orientable.*

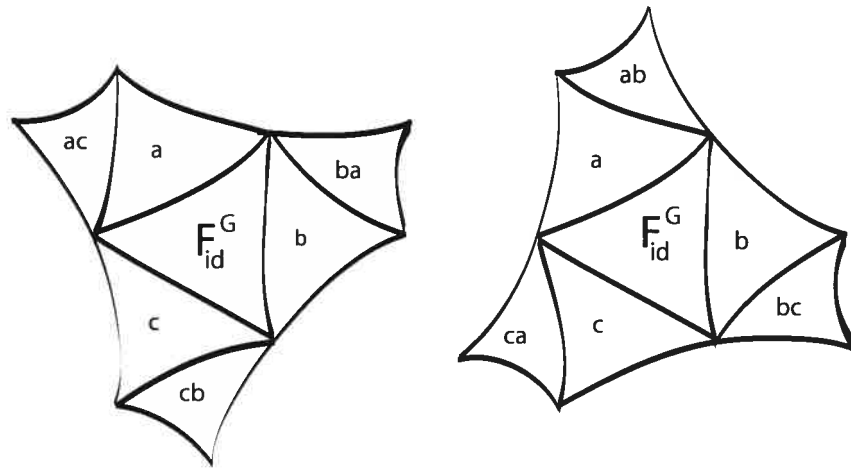
Démonstration. D'abord, montrons qu'elle n'a pas de bord. On sait que M est connexe, parce qu'elle est le quotient de \tilde{D} par un groupe qui agit de façon proprement discontinue $N < L$. De plus, son groupe d'isométries contient un sous-groupe de 168 éléments qui agit de façon transitive sur un pavage donné par des triangles équilatéraux. Si M a un bord, chacune des copies de ces triangles est sur le bord. On sait aussi que $B^G = \{A, B, C\}$ avec AB d'ordre 4, ainsi M contient 21 polygones à 8 côtés. Par connexité et par la structure donnée par l'action de G , ces polygones sont recollés deux à deux le long d'au moins un côté d'un de ces triangles. Celui-ci est donc à l'intérieur de M , contradiction.

Pour montrer que M n'est pas orientable. On peut montrer que C et $CBCB$ sont conjugués dans G par un calcul explicite. Étant donné que Φ est surjectif ceci

implique que dans L on a l'égalité d'ensembles suivante, pour un certain $\sigma \in L$, $\sigma N c N = c N b N c N b N \sigma N$. En particulier, ceci indique qu'il y a des éléments qui changent l'orientation dans N parce que $\sigma^{-1} c b c b \sigma \in c N$. Soit $N_+ := \{\sigma \in N \mid \sigma \text{ préserve l'orientation de } \tilde{\mathbb{D}}\}$, N_+ est un sous-groupe normal strict de N et de L , de plus, par le théorème d'isomorphisme $|N/N_+| = 2$. D'autre part, N ne contient pas de réflexion puisque M n'a pas de bord, on peut donc montrer en reprennant le même type d'argument que dans la preuve du Lemme que $\tilde{\mathbb{D}}/N_+$ est le "revêtement d'orientation" non trivial de $M := \tilde{\mathbb{D}}/N$. \square

M/H et M/K sont des domaines hyperboliques à bord, isospectraux par rapport aux conditions de Neumann. Chacun d'eux est constitué de 7 triangles équilatéraux, hyperboliques dont la disposition respecte la combinatoire imposée par l'action des générateurs de G sur $H \setminus G$ et $K \setminus G$. On peut retrouver l'image de ces domaines simplement en trouvant des représentants des classes de $H \setminus G$ et de $K \setminus G$, et en recollant 7 copies d'un triangle équilatéral. On peut montrer que $K \setminus G = \{K, Ka, Kb, Kc, Kba, Kcb, Kac\}$ et $H \setminus G = \{H, Ha, Hb, Hc, Hab, Hbc, Hca\}$ en vérifiant soigneusement les relations satisfaites par ces éléments. Ensuite on prend un triangle équilatéral d'angle $\frac{\pi}{4}$, chacun des côtés correspond à l'axe de réflexion d'un des générateurs. On recolle ces deux séries de triangles comme dans la figure 3.2.

Les domaines hyperboliques obtenus sont clairement isométriques grâce à l'isométrie donnée par les axes (médianes) de réflexion du triangle équilatéral hyperbolique de base. En fait, ceci signifie que G est un sous-groupe (strict) du groupe d'isométries de M et que H et K sont conjugués dans $\text{Isom}(M, \text{hyp.})$. Pour obtenir des domaines non isométriques mais isospectraux, il suffit de déformer la métrique sur M de façon à réduire son groupe d'isométries à G . On peut travailler directement sur la base M/G puisqu'elle est connue et détermine la métrique sur M (revêtement riemannien). Il est clair qu'il suffit d'en éliminer les isométries. On peut par exemple multiplier la métrique de M/G par une fonction positive définie sur M/G et non invariante par rapport aux isométries non

FIG. 3.2 Représentation de M/K (à gauche) et M/H (à droite).

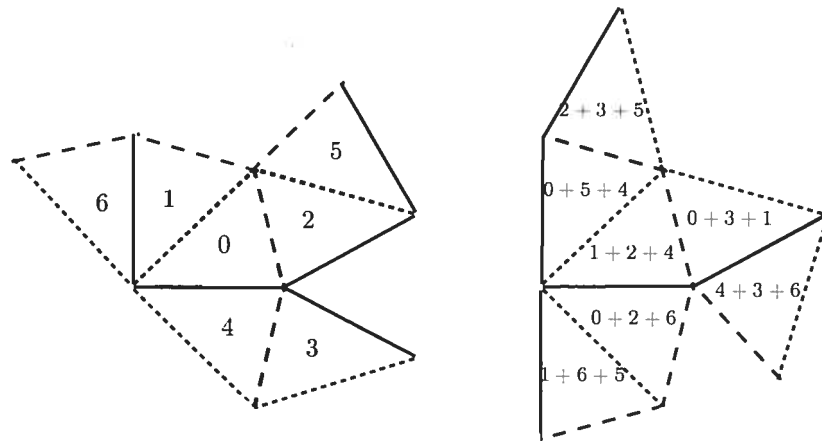
triviales de M/G . Ceci est une transformation conforme, conserve les angles du triangle et donc les relations qui nous intéressent. Notons \tilde{g} cette nouvelle métrique. Comme H et K ne sont pas conjugués dans $\text{Isom}(M, \pi_G^* \circ \tilde{g})$ et satisfont la condition (\dagger) , le Théorème de Sunada (la version de Bérard) nous assure que $\text{Spec}(M/H, \tilde{g}_H^*) = \text{Spec}(M/K, \tilde{g}_K^*)$ et que $(M/H, \tilde{g}_H^*)$ et $(M/K, \tilde{g}_K^*)$ ne sont pas isométriques.

Le procédé décrit ci-dessus peut s'appliquer généralement. Sunada montre, dans son article original [Su], que pour les hypothèses de son théorème, il existe toujours une métrique sur M/G , rendant M/K et M/H non isométriques. Cette métrique élimine les isométries non-triviales de M/G .

On a donc $(M/H, \tilde{g}_H^*)$ et $(M/K, \tilde{g}_K^*)$ isospectrales mais pas isométriques, la preuve par transplantation de Bérard nous assure qu'il existe une transplantation envoyant les fonctions propres de M/H sur celles de M/K , et inversement. Comme $(M/H, \tilde{g}_H^*)$ et $(M/K, \tilde{g}_K^*)$ ne sont pas isométriques, on sait que la transplantation est non triviale et dépend seulement de l'agencement des triangles. À partir de là, on peut transformer le triangle (hyperbolique) en un triangle ayant trois angles aigus distincts et donc aucune isométrie non-triviale. Les domaines obtenus ne

sont pas isométriques mais grâce à la transplantation, ils sont toujours isospectraux pour des conditions Neumann au bord. Grâce au Théorème 3.16, ils sont aussi isospectraux pour les conditions de Dirichlet. Il y a un choix continu pour les angles du triangle de base, en effet, il suffit de prendre trois nombres distincts $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi/2[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Il y a donc une famille continue de domaines isospectraux et non-isométriques pour les conditions de Dirichlet, de Neumann et comme nous verrons, certaines conditions mixtes.

FIG. 3.3 Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec condition Neumann ([BCDS])



Dans ce cas-ci, on aurait pu montrer beaucoup plus rapidement que les domaines obtenus sont isospectraux en explicitant la transplantation de fonctions impliquée. Les numéros dans les figures 3.3 donnent les indications pour transplanter les fonctions propres satisfaisant les conditions Neumann au bord. La figure 3.4 donne une transplantation explicite pour les conditions de Dirichlet au bord exhibée dans [BCDS].

FIG. 3.4 Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec condition Dirichlet ([BCDS])

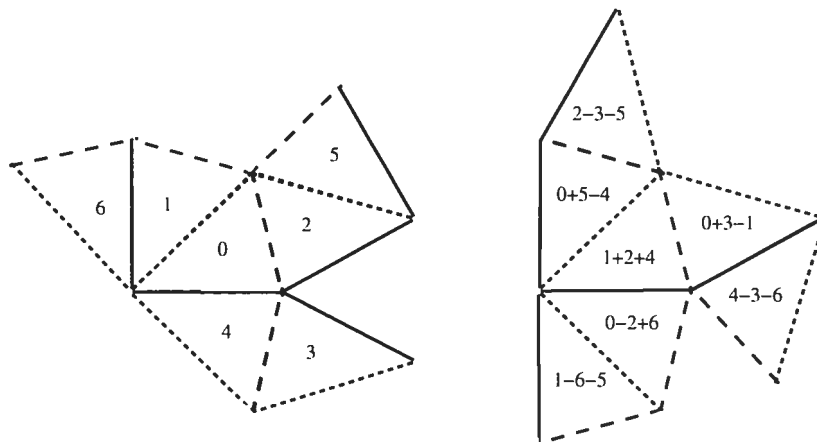
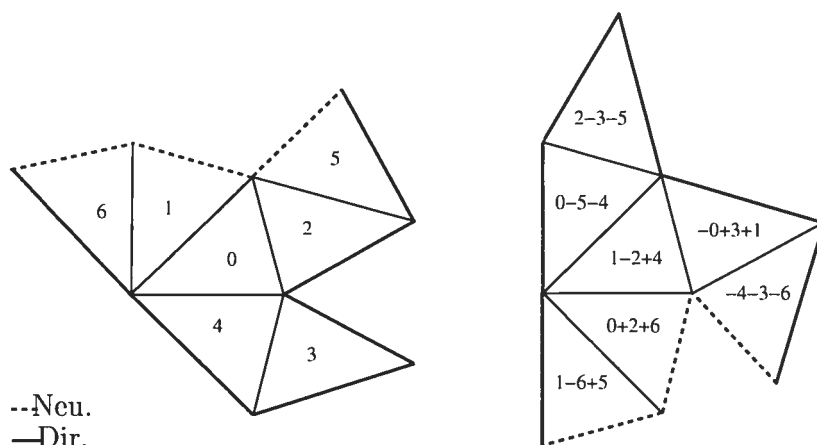


FIG. 3.5 Exemple de domaines planaires isospectraux et non isométriques avec conditions mixtes



3.4.3. Exemple avec conditions mixtes au bord

La figure 3.5 donne une transplantation explicite pour des conditions mixtes au bord (le bord en pointillés correspond au bord où c'est la condition de Neumann qui est imposée).

Il n'est pas évident, à priori, qu'il soit possible de construire des exemples de variétés isospectrales mais non-isométriques pour un problème mixte avec la méthode de Sunada. Celui décrit ci-dessus semble être obtenu de relations algébriques entre H et K et il semble clair qu'il existe une explication algébrique du type donné dans ce chapitre. L'un des intérêts de cette explication algébrique, serait d'être probablement applicable à une large famille d'exemples. De fait, les nombreux exemples de domaines isospectraux présentés dans l'article [BCDS] sont contruits à partir de triangles et du même triplet (G, H, K) de Sunada qui a été décrit dans cette section. Ils mèneraient alors à d'autres exemples de domaines isospectraux avec conditions mixtes.

3.5. ISOSPECTRALITÉ ET CONDITION MIXTE

Du moment où l'on s'intéresse au problème avec conditions mixtes, l'isospectralité n'implique pas nécessairement deux variétés riemanniennes distinctes. Par exemple, pour une variété riemannienne à bord (M, g) , on peut se demander si deux parties distinctes $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial M$ peuvent produire le même spectre (ie $\text{Spec}(M, \Gamma_1) = \text{Spec}(M, \Gamma_2)$). Est-il possible, pour une métrique fixée sur M , de caractériser les triplets (M, Γ_1, Γ_2) tels que $\text{Spec}(M, \Gamma_1) = \text{Spec}(M, \Gamma_2)$?

Évidemment, il existe des exemples triviaux de triplets, tels :

- $(M, \Gamma, \sigma(\Gamma))$, pour (M, g) une variété riemannienne à bord, Γ une partie non-vide du bord et σ un élément du groupe d'isométries de (M, g) ,
- (M, Γ, \emptyset) , pour (M, g) une variété à bord et Γ un ensemble fini de points.

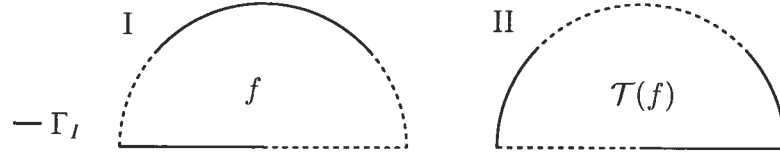
Trouver de tels triplets (M, Γ_1, Γ_2) , dans le cas où $\Gamma_2 = \partial M \setminus \overline{\Gamma_1}$, revient au problème Dirichlet-Neumann isospectralité exposé à la section 2.5.2. Cette question a été étudiée dans l'article [JLNP] où les auteurs ont exhibé une méthode systématique pour construire des domaines ayant une partition du bord Dirichlet-Neumann isospectrale.

3.5.1. Un exemple Dirichlet-Neumann isospectral

Dans cette sous-section, on détaille un exemple présenté dans l'article [JLNP], afin d'exhiber la structure algébrique sous-jacente. La figure 3.6 montre l'exemple en question, le domaine Ω et la partition du bord Dirichlet-Neumann isospectrale. Notons Γ_I la partie Dirichlet du problème I et Γ_{II} pour le problème II, où $\Gamma_{II} = \Gamma_I^c$.

Théorème 3.20. $\text{Spec}(\Omega, \Gamma_I) = \text{Spec}(\Omega, \Gamma_{II})$.

FIG. 3.6 Exemple d'un domaine planaire Dirichlet-Neumann isospectral



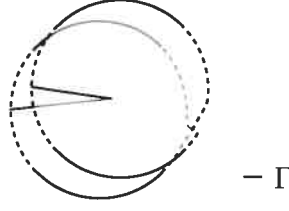
La transplantation explicite est donnée pour une fonction $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions I sur Ω , par

$$\mathcal{T}(f)(\theta, r) = \begin{cases} f(\frac{\pi}{2} - \theta, r) - f(\frac{\pi}{2} + \theta, r) & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ f(\theta - \frac{\pi}{2}, r) - f(\frac{3\pi}{2} - \theta, r) & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

On peut obtenir ces demi-disques à travers un revêtement ramifié d'orbivariété. Ceci permettra aussi de démontrer l'isospectralité des deux décompositions. Bien que cette démarche soit plus longue, ce qui nous intéresse ici est de mettre en valeur une certaine structure algébrique.

Démonstration. Prenons donc le revêtement ramifié à deux feuillettes, qui sera noté \mathcal{D} , du disque unité \mathbb{D} et paramétrisé par les coordonnées polaires (θ, r) , avec $\theta \in [0, 4\pi[$ et $r \in [0, 1[$ (voir figure 3.7). On considère le problème mixte sur \mathcal{D} déterminé par

$$\Gamma := \{(\theta, 1) \mid \theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[\cup]\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}[\cup]\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}[\}.$$

FIG. 3.7 Le revêtement ramifié \mathcal{D} du disque unité.

La partie Γ est trivialement Dirichlet-Neumann isospectrale par la rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant les isométries suivantes :

$$u_1 : (\theta, r) \mapsto (4\pi - \theta, r) \quad \text{et} \quad v_1 : (\theta, r) \mapsto (2\pi - \theta, r).$$

Notons K_1 , le sous-groupe engendré par u_1 et v_1 et remarquons que :

- (1) les isométries u_1 et v_1 sont dans $\text{Isom}(\mathcal{D}, \Gamma)$,
- (2) u_1 et v_1 sont des réflexions, $\text{Fix}_{u_1} \mathcal{D} = \{(\theta, r) \mid \theta = \pi \text{ ou } \theta = 3\pi\}$ et $\text{Fix}_{v_1} \mathcal{D} = \{(\theta, r) \mid \theta = 2\pi \text{ ou } \theta = 4\pi\}$,
- (3) le groupe K_1 est un groupe de Klein (i.e u_1 et v_1 commutent et sont d'ordre 2),
- (4) comme revêtement (ramifié) d'orbivariété, $\mathcal{D}/K_1 \cong \Omega$.

Les fonctions sur Ω qui satisfont les conditions I, sont en correspondance avec celles de \mathcal{D} satisfaisant les conditions données par Γ et qui sont paires par rapport à u_1 et impaires par rapport à v_1 . Notons $E_\lambda^1 = \{f \in E_\lambda(\mathcal{D}, \Gamma) \mid f \circ u_1 = f, f \circ v_1 = -f\}$ et ainsi, comme précédemment, pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Spec}(\Omega, \Gamma_I)$, $E_\lambda(\Omega, \Gamma_I) \cong E_\lambda^1$.

On peut construire un groupe similaire à K_1 , afin d'obtenir le problème II. En effet, notons

$$u_2 : (\theta, r) \mapsto (3\pi - \theta, r) \quad \text{et} \quad v_2 : (\theta, r) \mapsto (\pi - \theta, r)$$

et K_2 le sous-groupe d'isométries de \mathcal{D} engendré par u_2 et v_2 , il possède les mêmes propriétés 1 à 4 que K_1 . De fait, K_1 et K_2 sont conjugués par la rotation

$s : (\theta, r) \mapsto (\frac{\pi}{2} + \theta, r)$ de \mathcal{D} . De même, on définit $E_\lambda^2 = \{f \in E_\lambda(\mathcal{D}, \Gamma) \mid f \circ u_2 = f, f \circ v_2 = -f\}$ et on a pour $\lambda \in \text{Spec}(\Omega, \Gamma_{II})$, $E_\lambda(\Omega, \Gamma_{II}) \cong E_\lambda^2$.

Comme dans la preuve du théorème de Sunada, on est intéressé à la dimension des sous-espaces E_λ^1 et E_λ^2 . En effet pour montrer que $\text{Spec}(\Omega, \Gamma_{II}) = \text{Spec}(\Omega, \Gamma_I)$, avec multiplicité, il suffit de montrer que $\dim E_\lambda^1 = \dim E_\lambda^2$ en prenant la trace de projections adéquates.

Notons $k_\lambda = \dim E_\lambda(\mathcal{D}, \Gamma)$ et $A^\lambda : \text{Isom}(\mathcal{D}, \Gamma) \rightarrow \text{GL}(r, k_\lambda)$ la représentation matricielle de $\text{Isom}(\mathcal{D}, \Gamma)$ dans les automorphismes de $E_\lambda(\mathcal{D}, \Gamma)$.

Étant donné que K_1 et K_2 sont chacun des sous-groupes commutatifs, les projections sur E_λ^1 et E_λ^2 sont données respectivement par:

$$p_1 := \frac{1}{4}(Id + A_{u_1} - A_{v_1} - A_{u_1 \circ v_1})$$

$$p_2 := \frac{1}{4}(Id + A_{u_2} - A_{v_2} - A_{u_2 \circ v_2})$$

On vérifie aisément que pour $i = 1, 2$, $p_i \circ p_i = p_i$, grâce à la commutativité de u_i et v_i et que pour une fonction $f \in E_\lambda(\mathcal{D}, \Gamma)$, $A_{v_i}(p_i(f)) = -(p_i(f))$ et $A_{u_i}(p_i(f)) = (p_i(f))$. Ce sont donc bien les projections recherchées. Finalement, étant donné que K_1 et K_2 sont conjugués,

$$\dim E_\lambda^1 = \text{trace}(p_1) = \text{trace}(p_2) = \dim E_\lambda^2$$

□

Une preuve très similaire est présentée dans l'article [JLNP]. L'intérêt de la discussion ci-dessus n'est certainement pas de simplifier la preuve mais de mettre en valeur l'aspect algébrique du problème. Les autres exemples de Dirichlet-Neumann isospectralité présentés dans l'article, peuvent également être obtenus comme quotients de la manière décrite ci-dessus. De fait, la dernière démonstration n'utilise que les hypothèses de la proposition suivante :

Proposition 3.21. *Soit (M, g) une variété riemannienne à fermeture compacte, ayant un bord non-vide et $\Gamma \subset \partial M$ une partie du bord qui est trivialement*

Dirichlet-Neumann isospectrale. Alors pour tout groupe de Klein $K < \text{Isom}(M, \Gamma)$ contenant deux réflexions u et v , $\partial(M/K)$ admet une partie Dirichlet-Neumann isospectrale donnée par $\pi_K(\Gamma) \cup \pi_K(\text{Fix}_v M)$.

Introduisons quelques notations afin de clarifier la dernière proposition. Pour τ et σ des isométries de M , notons $c_\sigma(\tau) = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$, le conjugué de τ par σ et définissons l'ensemble $\mathcal{I} := \{\sigma \in \text{Isom}(M, g) \mid \sigma(\Gamma) = \Gamma^c\}$ qui est supposé non vide. Pour $K < \text{Isom}(M, \Gamma)$ et $\sigma \in \mathcal{I}$, on a naturellement $M/K \cong M/(c_\sigma(K))$ et $\partial M/K \setminus (\pi_K(\Gamma) \cup \pi_K(\text{Fix}_v M)) = \pi_{c_\sigma(K)}(\Gamma) \cup \pi_K(\text{Fix}_{c_\sigma(v)} M)$. La Proposition 3.21 affirme alors que :

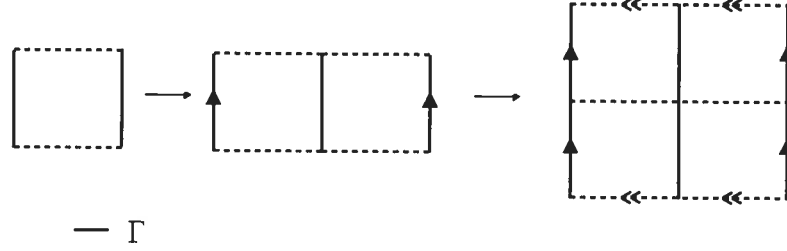
$$\text{Spec}(M/K, \pi_K(\Gamma) \cup \pi_K(\text{Fix}_v M)) = \text{Spec}(M/c_\sigma(K), \pi_K(\Gamma) \cup \pi_K(\text{Fix}_{c_\sigma(v)} M))$$

3.6. CONCLUSION

La Proposition 3.21 ne peut produire d'exemples différents de ceux donnés par la construction systématique décrite dans l'article [JLNP]. Son intérêt est d'exhiber la relation entre la structure du groupe d'isométries d'un certain revêtement et les exemples en question. Dans ce même article, les auteurs posent quelques problèmes ouverts, à savoir, entre autres, s'il est nécessaire qu'un domaine ait une certaine structure algébrique pour admettre une partie du bord Dirichlet-Neumann isospectrale. En fait, on peut construire un revêtement d'orbivariété d'un domaine à bord admettant une action du groupe de Klein. Cette construction dépend du choix d'une partie du bord qui doit être suffisamment régulière. Cependant, ce revêtement n'est pas lisse, à moins de transformer la métrique et donc le domaine de base. Le revêtement se construit comme suit.

Soit (M, g) une variété riemannienne à fermeture compacte et $\Gamma_0 \subset \partial M_0$ une partie ouverte contenant un nombre fini de composantes connexes. Prenons quatre copies de M notées M_{00} , M_{01} , M_{10} et M_{11} , on recolle ensuite deux couples le long des images de Γ dans chacune d'elle. Notons ce recollement $M_1 = M_{00} \cup_\Gamma M_{01}$ et $M_2 = M_{10} \cup_\Gamma M_{11}$. Finalement on recolle ces deux copies le long de leur bord qui

FIG. 3.8 Exemple



est l'union disjointe de quatre copies de $\Gamma^c := \partial M \setminus \Gamma$, c'est-à-dire que l'on prend $\widetilde{M} = M_1 \cup_{\Gamma^c} M_2$. En général, si on impose la métrique faisant du revêtement d'orbivariété $\widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement riemannien il y aura des hypersurfaces singulières correspondantes aux endroits où l'on a recollé les différentes copies. En fait ce qui nous intéresse ici c'est surtout d'imposer une métrique \widetilde{g} permettant de conserver le groupe d'isométries de M sans trop l'agrandir et que \widetilde{M} soit une variété lisse qui possède deux isométries d'ordre 2, u et v telles que $u(M_{i0}) = u(M_{i1})$ et $v(M_{0i}) = u(M_{1i})$ pour $i = 0, 1$. En supposant que cette métrique \widetilde{g} existe, u et v commutent et donc le groupe K , qu'elles engendrent, est un groupe de Klein.

De plus, $\widetilde{M}/K \cong M$ et suivant les idées décrites dans ce chapitre on pourrait montrer que Γ est Dirichlet-Neumann isospectral (avec cette nouvelle métrique) si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{Spec}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, $\dim E_\lambda^{+-} = \dim E_\lambda^{-+}$, où

$$E_\lambda^{+-} = \{f \in E_\lambda(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \mid f \circ u = f, f \circ v = -f\},$$

$$E_\lambda^{-+} = \{f \in E_\lambda(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \mid f \circ u = -f, f \circ v = f\}.$$

En fait, on peut même montrer que dans ce cas-ci, Γ est Dirichlet-Neumann isospectral si et seulement si les traces des représentations matricielles de u et v sont égales sur chaque espace propre $E_\lambda(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Ce qui est vrai, entre autres, si u

et v sont conjugués dans le groupe d'isométries de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, mais le cas échéant Γ est trivialement Dirichlet-Neumann isospectral.

L'intérêt de cette construction est comme on l'a dit la structure algébrique. Peut-on obtenir un résultat inverse pour les problèmes de Dirichlet-Neumann isospectralité avec l'approche algébrique? Hubert Pesce a démontré, dans l'article [Pe], une réciproque générique au Théorème de Sunada, qui fonctionne, entre autres, lorsque le groupe est commutatif et la variété de dimension 2. Dans notre cas, ce résultat ne s'applique pas directement parce que l'on veut obtenir deux types de conditions au bord de surfaces quotients. Peut-on les adapter? En combinant ces résultats potentiels avec la preuve de Bérard qui construit une transplantation à partir d'une situation algébrique, peut-on dériver une implication du type: si (M, Γ) est Dirichlet-Neumann isospectral alors il existe une transplantation de $E_\lambda(M, \Gamma)$ dans $E_\lambda(M, \Gamma^c)$? Il est certain que ceci serait un chemin intéressant en vue de démontrer la Conjecture 2.18 affirmant que le disque n'admet pas de Dirichlet-Neumann isospectralité non-triviale. En effet, l'aspect cyclique et la courbure uniforme du bord du disque laisse croire qu'il n'y a pas de transplantation non-triviale.

La recherche de variétés isospectrales mais non-isométriques est motivée par le problème inverse: quelles propriétés topologiques, différentielles ou riemanniennes d'une variété sont déterminées par son spectre? Par exemple, dans leur article [BW], *On ne peut entendre l'orientabilité d'une surface*, Bérard et Webb ont exhibé un exemple de deux variétés Neumann-isospectrales mais dont l'une est orientable et l'autre pas. Ceci nous indique que l'orientabilité d'une surface ne fait pas partie des caractéristiques déterminées par le spectre pour les conditions de Neumann au bord.

Si on s'intéresse aux variétés à bord, on peut se demander si les conditions imposées au bord vont influencer cette dépendance. Par exemple, les variétés citées ci-dessus sont Neumann-isospectrales mais pas Dirichlet-isospectrales. Le problème mixte est un bon outil pour explorer cette problématique.

L'approche algébrique à la recherche d'exemples non-triviaux de variétés isospectrales, initiée en partie par Sunada, fut très prolifique. Non seulement par le nombre et même les familles continues d'exemples mais aussi par leur intérêt. Ces constructions ont permis de poser des limites à l'ensemble des propriétés géométriques déterminées par le spectre du Laplacien. Pour le cas mixte, cette recherche d'exemples de variétés isospectrales débute, une méthode algébrique pourrait aider à cerner les possibilités.

Index

- $\mathcal{H}(M)$, 21
- $\mathcal{H}(M, \Gamma)$, 21
- $\text{Fix}_\tau M$, 10
- $\text{Grad } f$, 21
- $H^{1,2}(M)$, 19
- $\text{Isom}(M, g)$, 10
- $\text{Isom}(M, g, \Gamma)$, 20
- $\text{Spec}(M, \Gamma)$, 15, 16
- $\text{Stab}_p G$, 10
- action libre, 55
- action propre, 55
- action proprement discontinue, 55
- calotte sphérique, 31
- caractère, 12
- classe de conjugaison, 12
- connexion de Levi-Civita, 7
- coordonnées normales, 9
- crochet de Lie, 7
- dérivée directionnelle, 7, 8
- Dirichlet-Neumann isospectralité, 53
- divergence, 7, 8
- domaine fondamental, 63
- domaines nodaux, 23
- ensemble nodal, 23, 27
- exponentielle, 9
- fibré cotangent, 6
- fibré dual, 6
- fibré tangent, 6
- fibré vectoriel, 6
- fonction admissible, 21
- géodésique, 8
- gradient, 6, 8
- gradient faible, 21
- isométrie, 10
- isométrie locale, 10
- Laplacien, 8, 14
- Lipschitz, 19
- métrique, 6
- opérateur d'entrelacement, 12
- orbivariété, 55
- ordre d'annulation, 17
- orientation, 11
- passage au quotient, 55
- Principe de Monotonie, 23
- Principe du Maximum, 18
- quotient, 55
- réflexion, 64
- représentation, 12

représentation matricielle, 12

revêtement riemannien, 57

spectre d'un opérateur, 14

spectre d'une variété, 15

stabilisateur, 10

symétrisé cylindrique, 32

symétrisé sphérique, 31

symétrisation, 31, 35, 38

Théorème de Courant, 25

Théorème de Rayleigh, 22

transplantation, 61

BIBLIOGRAPHIE

- [A] N. ARONSZAJN, *A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl.(9) 36 (1957), 235-249.
- [Av] I. AVRAMIDI, *Heat kernel asymptotics of Zaremba boundary value problem*, Math. Phys. Anal. Geom., 7 (2004) 9-46.
- [Be] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math Ann. 292 (1992) no.3 547-559.
- [BM] P. BÉRARD, D. MEYER *Inégalités isopérimétriques et applications*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 15 (1982) no. 3, p. 513-541
- [BW] P. BÉRARD, D. WEBB, *On ne peut entendre l'orientabilité d'une surface*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér 1 Math. 320, (1995) no. 5, 533-536.
- [BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET , *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math., No. 194, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [B] L. BERS, *Local behaviour of solutions of general linear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 473-476.
- [Br] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Science sup, Dunod, Paris, 1999.
- [BCDS] P. BUSER, J. CONWAY, P. DOYLE, K.-D. SEMMLER, *Some Planar Isospectral Domains*, Internat. Math. Res. Notices (1994) 9, 391ff.
- [Bu] P. BUSER, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Progress in Mathematics, Volume 106, Birkhäuser Boston, 1992
- [C1] I. CHIAVEL, *Eigenvalue in Riemannian Geometry*, Mathematics 115, Academic Press, 1984.
- [C2] I. CHIAVEL, *Riemannian Geometry : A Modern Introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics 108, Cambridge University Press, 1993.

- [Ch] S.Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal Sets*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), 43-55.
- [CM] H.S.M. COXETER, W.O.J. MOSER, *Generators and Relations for Discrete Groups*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 4e édition, 1980.
- [D1] J. DENZLER, *Bounds for the Heat Diffusion Through Windows of Given Area*, J. Math. Anal. Appl. 217 (1998) no.2, 405-422.
- [D2] J. DENZLER, *Windows of Given Area with Minimal Heat Diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 569-580.
- [Do] J.S. DOWKER, *The Hybrid Spectral Problem and Robin Boundary Conditions*, J. Phys. A. 38 (2005) no.5, 1049-1061.
- [EG] L.C. EVANS, R.F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Property of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.
- [GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Springer, Universitext, 3e édition, 1987.
- [GT] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer, Classics in Mathematics, ré-impression de l'édition de 1998, 2001.
- [GWW] C. GORDON, D. WEBB, S. WOLPERT, *Isospectral Plane Domains and Surfaces via Riemannian Orbifolds*, Invent. Math. 110,(1992) 1-22.
- [Gr] M. GRAHAM *Thèse de Doctorat (en préparation)*, sous la direction du professeur Michael Levitin, Université Heriot-Watt, Edinbourg.
- [H] A. HENROT, *Minimization Problems for Eigenvalues of the Laplacian*, J. Evol. Equ. 3 (2003) no.3, 443-461.
- [JLNP] D. JAKOBSON, M. LEVITIN, N. NADIRASHVILI, I. POLTEROVICH, *Spectral problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions: isospectrality and beyond*, J. Comput. Appl. Math. 194 no. 1 (2006), 141-155.
- [K] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly 73 (1966) no.4, part II, 1-23.

- [KN] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, Interscience Publishers, 1963.
- [LPP] M. LEVITIN, L. PARNOVSKI, I. POLTEROVICH, *Isospectral domains with mixed boundary conditions*, J. Phys. A. 39 (2006) 2073-2082.
- [MS] H.P. MCKEAN, JR. I.M. SINGER, *Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. 1 (1967) 43-69.
- [Me] A. D. MELAS *On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in \mathbb{R}^2* . J. Differential Geom. 35 (1992) no.1, 255-263.
- [M] C. MIRANDA, *Partial Differential Equation of Elliptic Type*, Springer-Verlag, 2e édition révisée, 1970.
- [P] L. E. PAYNE, *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Rev. 9 1967, 453-488.
- [Pe] H. PESCE, *Variétés isospectrales et représentations de groupes*, Contemp.Math., 173 (1994), 231-240.
- [Po] G. POLYA, *Remarks on the foregoing paper*, J. Math. Phys. 31 (1952), 55-57.
- [PS] G. POLYA, G. SZEGÖ, *Isoperimetrical Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies 27, Princeton Univ. Press 1951.
- [SY] R. SCHOEN, S.-T. YAU, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, International Press, 1994.
- [Sp] E. SPERNER, *Spherical symmetrization and Eigenvalue estimates*, Math. Z. 176 (1981) 76-86.
- [Su] T. SUNADA, *Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds*, Ann. of Math. (2), 121 (1985), 169-186.
- [Ta] M.E TAYLOR, *Partial Differential Equation, Basic Theory*, Springer-Verlag, Texts in Applied Mathematics, 1996.
- [T] W.P. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifold*, notes de cours électroniques <http://www.msri.org/communications/books/gt3m/> , 1980.